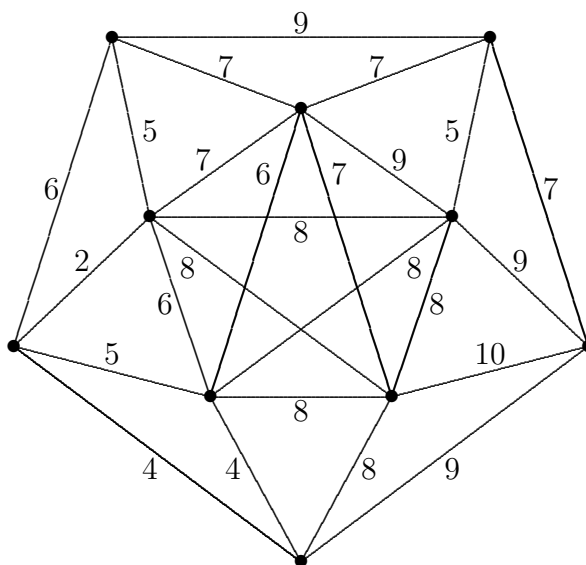
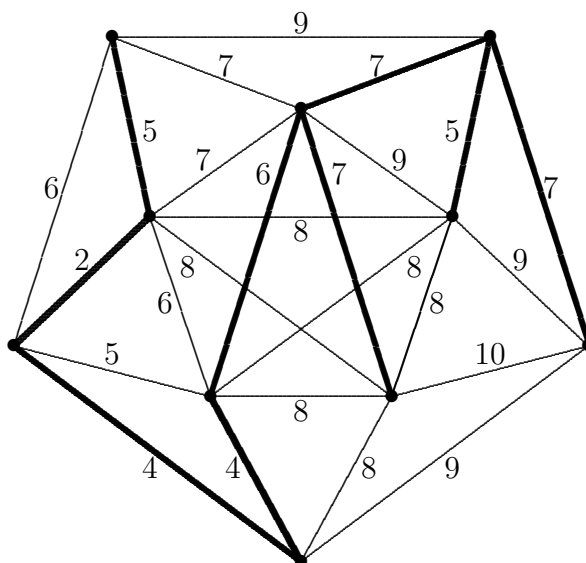


Minimální kostra

Najděte minimální kostru grafu G :



Řešení: minimální kostra je v grafu G vyznačena tučně.

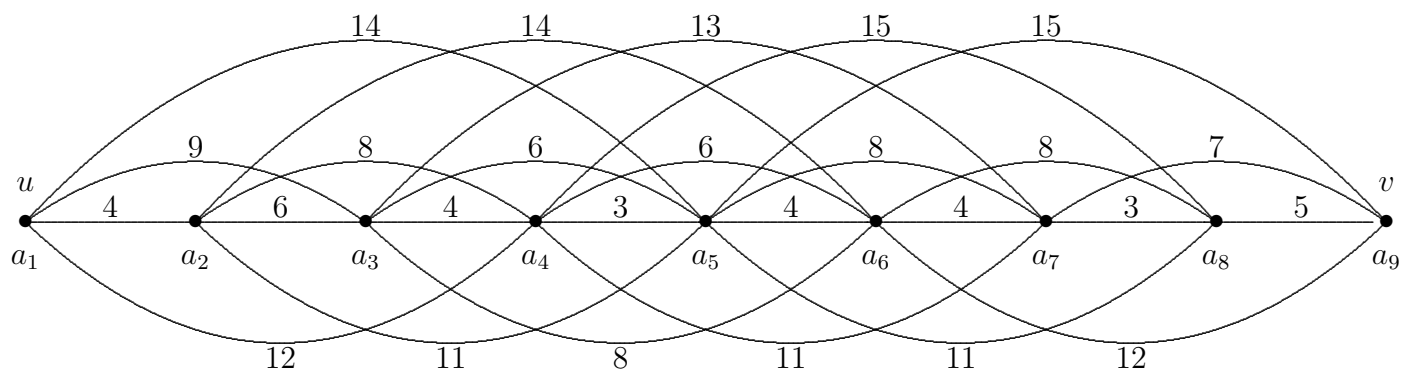


Vyzkoušejte si při konstrukci minimální kostry obě varianty základního (hladového) algoritmu:

1. K_0 je diskrétní graf na uzlové množině grafu G , do K_1 dáme hranu grafu G s nejmenším ohodnocením, a pak postupně konstruujeme K_{i+1} z K_i přidáním hrany grafu G s nejmenším ohodnocením tak, aby K_{i+1} byl souvislý a nevznikla kružnice (což lze zajistit tak, že přidávanou hranu v každém kroku volíme tak, aby vždy měla jeden uzel v K_i a druhý mimo K_i).
2. $K_0 = G$, postupně vyhledáváme kružnice v K_i a mažeme v nich hrany s největším ohodnocením.

Minimální cesta

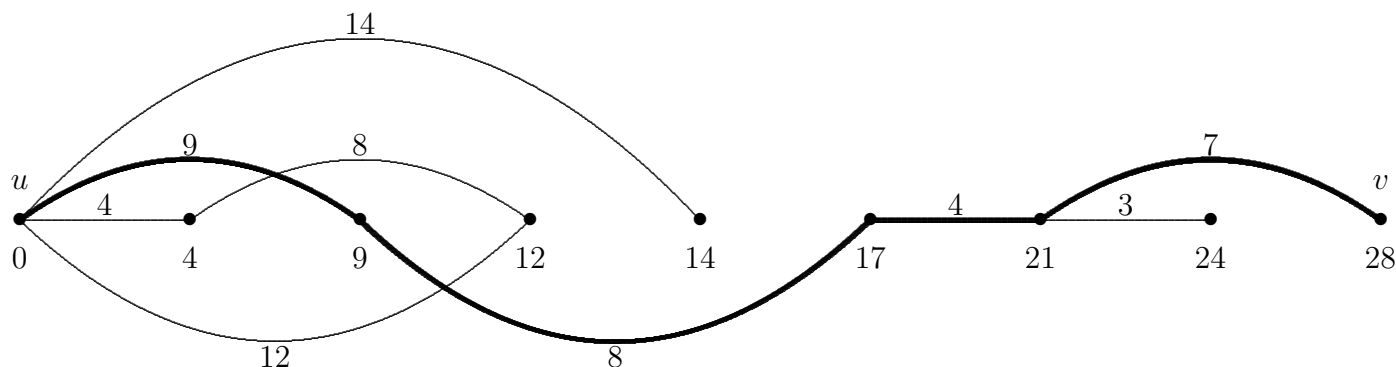
Pomocí Dijkstrova algoritmu najděte minimální cestu z uzlu u do uzlu v v grafu G :



Řešení: Tabulka ukazuje postup konstrukce dočasných a trvalých hodnot jednotlivých uzlů; trvalé hodnoty jsou označeny tučně.

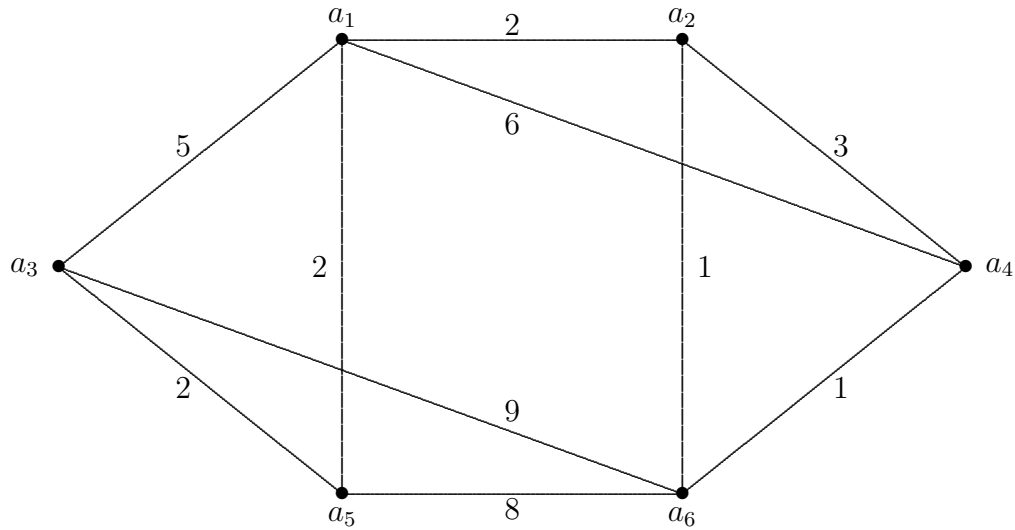
$u = a_1$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$a_9 = v$
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	4	9	12	14	∞	∞	∞	∞
	4	9	12	14	18	∞	∞	∞
		9	12	14	17	22	∞	∞
			12	14	17	22	27	∞
				14	17	22	25	29
					17	21	25	29
						21	24	28
							24	28

Na obrázku jsou minimální cesty z uzlu u do všech uzlů grafu; minimální cesta z u do v je vyznačena tučně.



Distanční matice

Sestrojte distanční a w-distanční matici grafu G :



Řešení:

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^w(G) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 8 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Kritická cesta 1

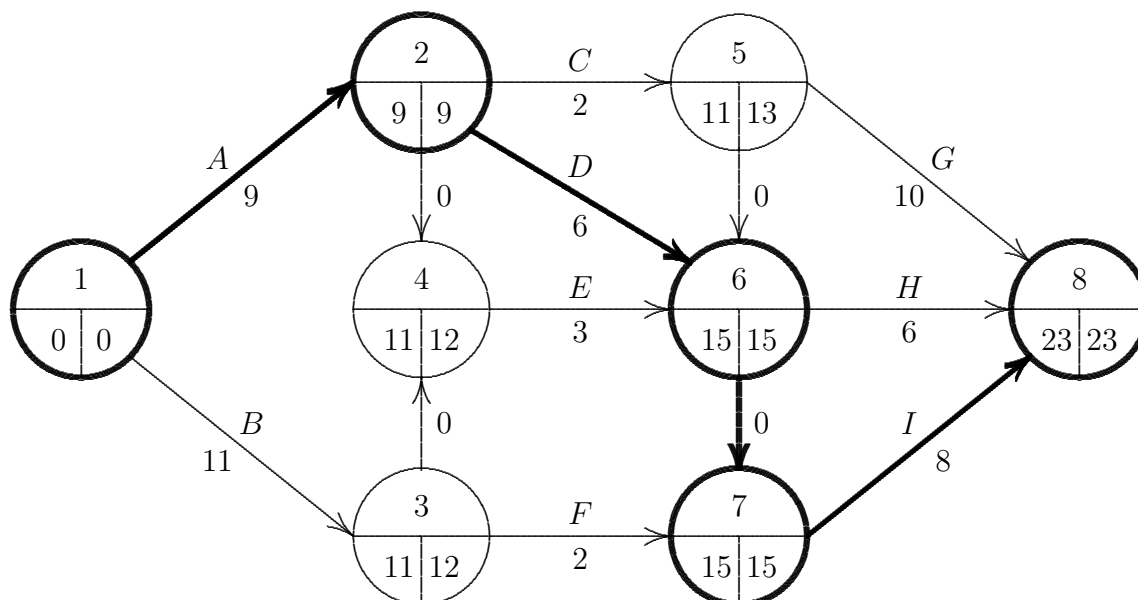
Struktura činností v rámci projektu je dána následující tabulkou:

Činnost	Doba trvání	Podmiňující činnosti
<i>A</i>	9	—
<i>B</i>	11	—
<i>C</i>	2	<i>A</i>
<i>D</i>	6	<i>A</i>
<i>E</i>	3	<i>A, B</i>
<i>F</i>	2	<i>B</i>
<i>G</i>	10	<i>C</i>
<i>H</i>	6	<i>C, D, E</i>
<i>I</i>	8	<i>C, D, E, F</i>

1. Sestrojte síťový graf projektu.
2. Určete minimální dobu trvání projektu a najděte kritickou cestu.
3. Kdy nejpozději je nutno zahájit činnost *C*, aby nebyl zpožděn celý projekt?

Řešení:

1.



2. Minimální doba trvání projektu je 23, kritická cesta je vyznačena tučně.
3. Činnost *C* je nutno zahájit nejpozději v čase 11.

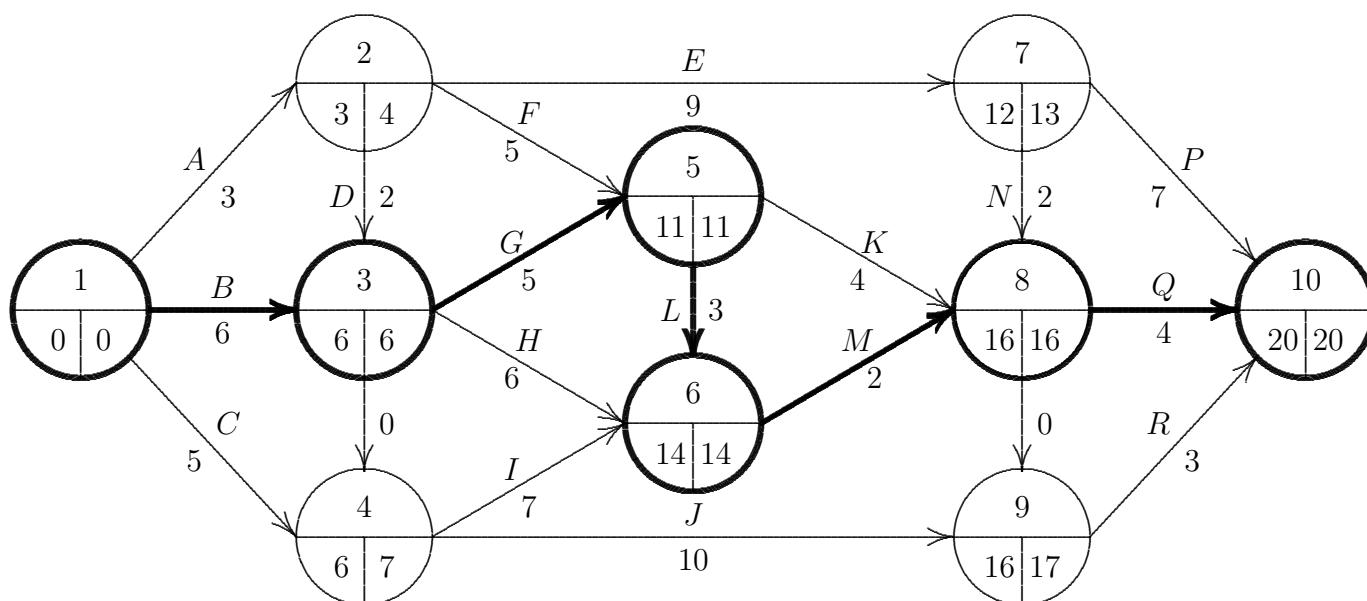
Kritická cesta 2

Struktura činností v rámci projektu je dána následující tabulkou:

Činnost	Doba trvání	Podmiňující činnosti
<i>A</i>	3	—
<i>B</i>	6	—
<i>C</i>	5	—
<i>D</i>	2	<i>A</i>
<i>E</i>	9	<i>A</i>
<i>F</i>	5	<i>A</i>
<i>G</i>	5	<i>B, D</i>
<i>H</i>	6	<i>B, D</i>
<i>I</i>	7	<i>B, C, D</i>
<i>J</i>	10	<i>B, C, D</i>
<i>K</i>	4	<i>F, G</i>
<i>L</i>	3	<i>F, G</i>
<i>M</i>	2	<i>H, I, L</i>
<i>N</i>	2	<i>E</i>
<i>P</i>	7	<i>E</i>
<i>Q</i>	4	<i>K, M, N</i>
<i>R</i>	3	<i>J, K, M, N</i>

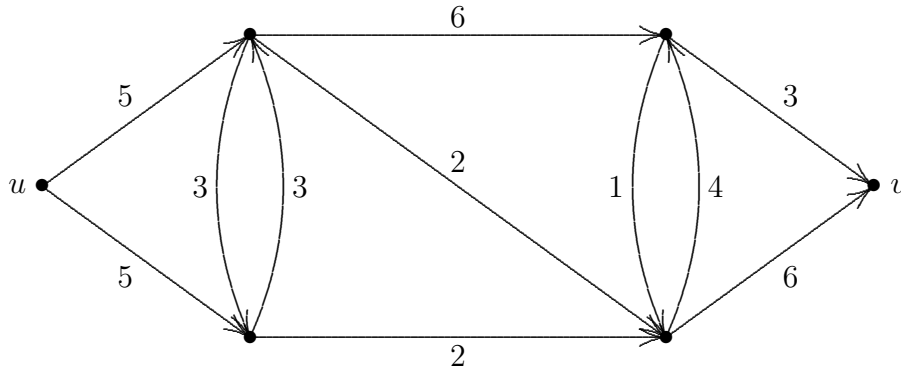
Sestrojte síťový graf projektu, určete minimální dobu trvání projektu a najděte kritickou cestu.

Řešení:

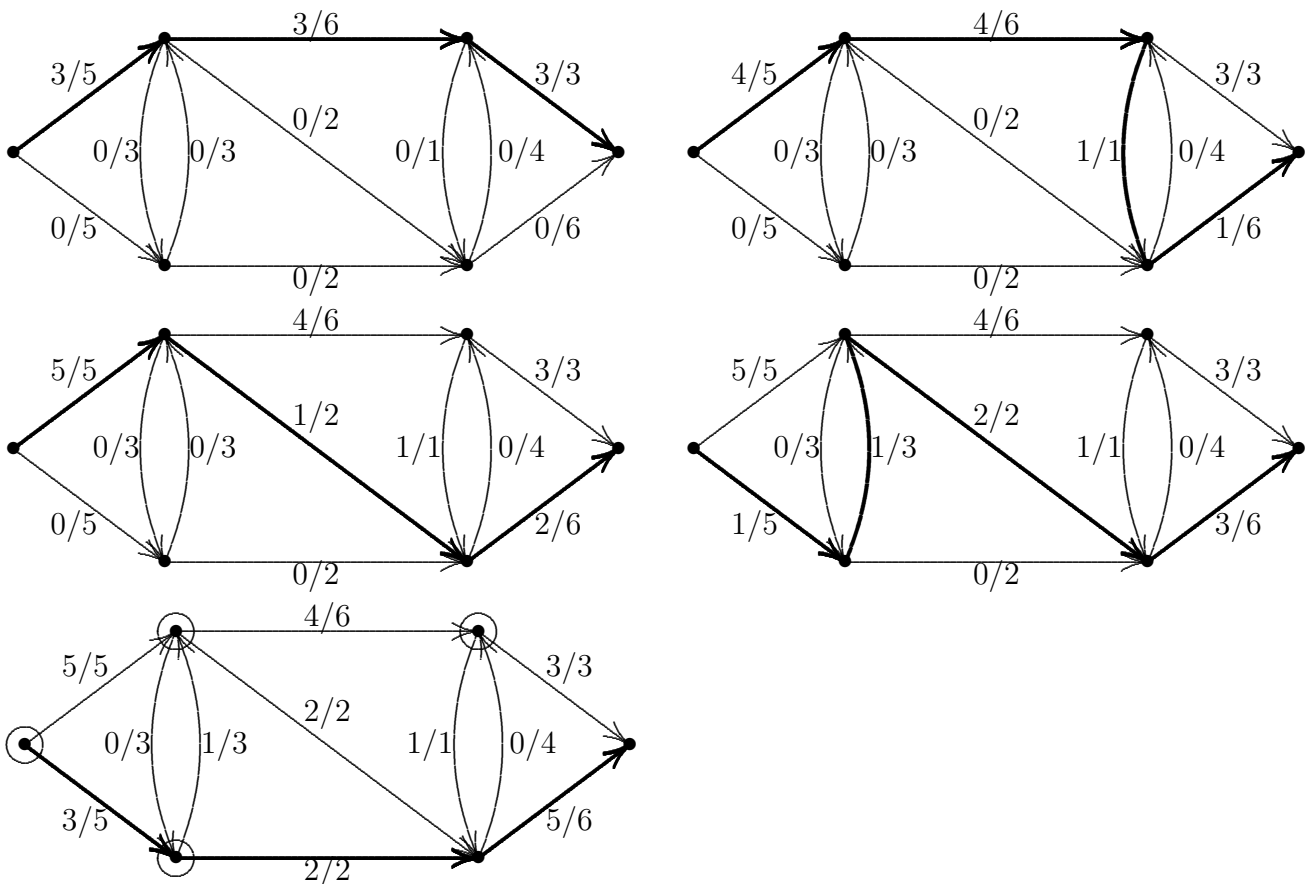


Maximální tok 1

Najděte maximální tok z u do v v síti \vec{G} a ověřte, že nalezený tok splňuje podmínky maximality.



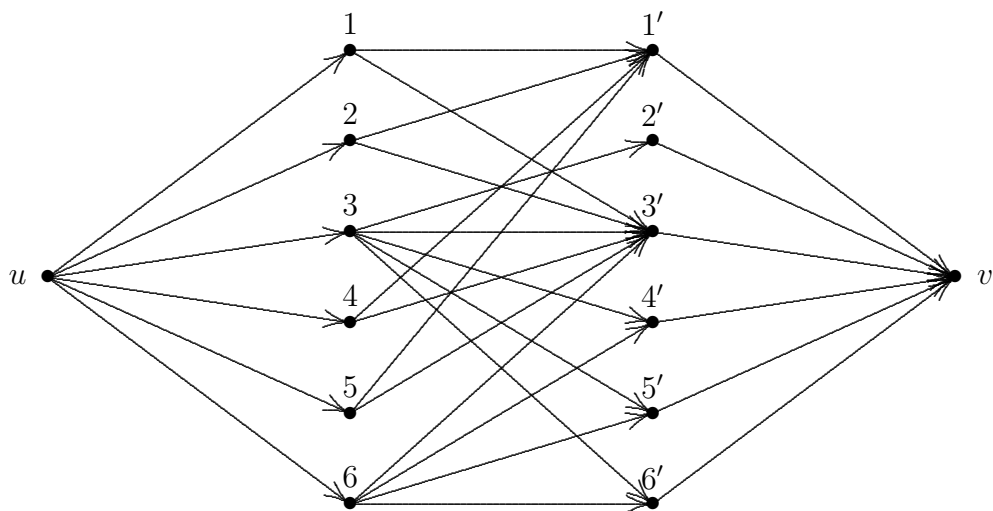
Řešení. Následující obrázky ukazují jednotlivé iterace algoritmu. Rezervní polocesta je vždy vyznačena tučně, ohodnocení hrany (u_i, u_j) je $x_{i,j}/r_{i,j}$ (tj. 'aktuální hodnota toku hranou'/'propustnost').



Velikost nalezeného toku je rovna intenzitě zdroje (a též intenzitě stoku), tj. $a = 5 + 3 = 8$. Zakroužkované uzly tvoří množinu R minimálního řezu, a propustnost řezu (R, \bar{R}) je rovna $2 + 2 + 1 + 3 = 8$. Velikost toku (tj. intenzita zdroje) je tedy rovna propustnosti minimálního řezu, a tedy tok je maximální. Navíc si povšimněme toho, že všechny hrany v (R, \bar{R}) jsou nasycené a všechny hrany v (\bar{R}, R) mají nulový tok.

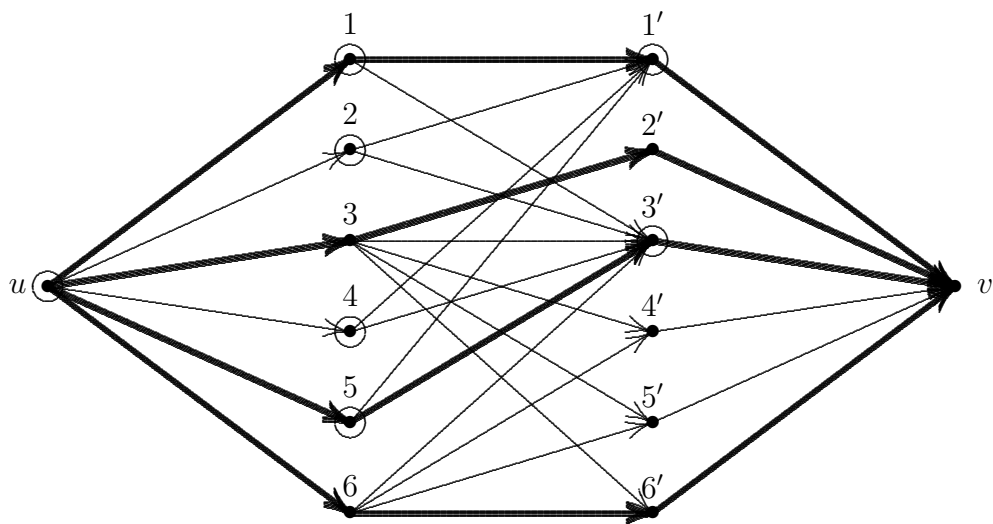
Maximální tok 2

Najděte maximální tok z u do v v síti \vec{G} a ověřte, že nalezený tok splňuje podmínky maximality.



Propustnosti všech hran jsou rovny jedné.

Řešení.



Nasyčené hrany jsou v obrázku vyznačeny tučně, velikost nalezeného toku (intenzita zdroje) je 4.

Uzly tvořící množinu R minimálního řezu jsou zakroužkovány. Minimální řez (R, \bar{R}) je tvořen hranami $(u, 3)$, $(u, 6)$, $(1', v)$ a $(3', v)$, a jeho propustnost je tedy také 4.

Velikost nalezeného toku je tedy rovna propustnosti minimálního řezu, a náš tok je proto maximální.

Navíc si povšimneme toho, že všechny hrany v (R, \bar{R}) (tj. $(u, 3)$, $(u, 6)$, $(1', v)$ a $(3', v)$) jsou nasycené, a všechny hrany v (\bar{R}, R) (tj. $(6, 3')$ a $(3, 3')$) mají nulový tok. Ještě poznamenejme, že v dané síti není maximální tok jednoznačný (tj. toto je jeden z možných maximálních toků).

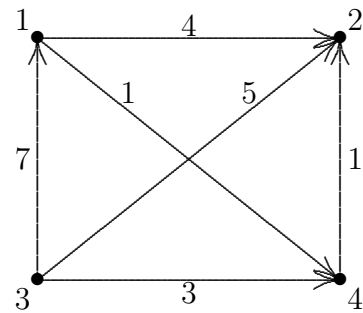
Rozložitelnost matic 1

Zjistěte, zda je matice \mathbf{A} rozložitelná, a pokud ano, najděte příslušnou permutaci řádků a sloupců.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Řešení.

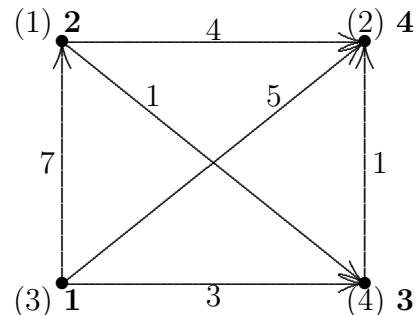
1. Sestrojíme diagram $\vec{G}(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} :



Graf $\vec{G}(\mathbf{A})$ není silně souvislý a tedy \mathbf{A} je rozložitelná.

2. Graf $\vec{G}(\mathbf{A})$ je dokonce acyklický, tj. má jednoduzlové kvazikomponenty.

Uzly očísujeme podle věty o acyklických grafech (stará čísla uzlů jsou na obrázku v závorkách a nová jsou tučně).



3. Porovnáním starých a nových čísel uzlů dostáváme permutaci π , která rozkládá matici \mathbf{A} :

Stará čísla uzlů	1	2	3	4
Nová čísla uzlů	2	4	1	3

4. Aplikací permutace π na řádky matice \mathbf{A} dostaneme matici

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a aplikací téže permutace π na sloupce této matice dostaneme matici

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

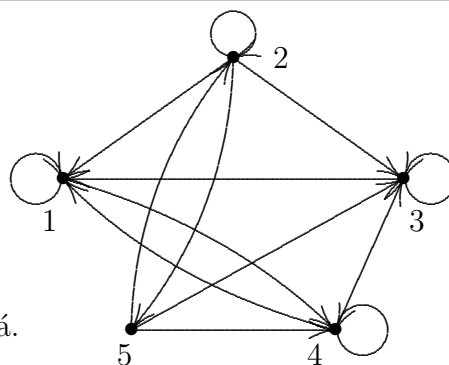
Rozložitelnost matic 2

Zjistěte, zda je matice \mathbf{A} rozložitelná, a pokud ano, najděte příslušnou permutaci řádků a sloupců.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

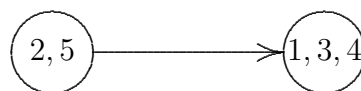
Řešení.

1. Sestrojíme diagram $\vec{G}(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} :



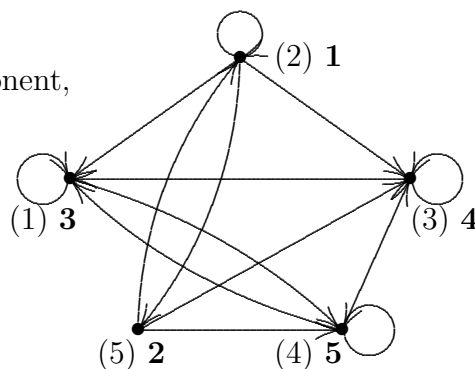
Graf $\vec{G}(\mathbf{A})$ není silně souvislý a tedy \mathbf{A} je rozložitelná.

2. Graf $\vec{G}(\mathbf{A})$ má dvě kvazikomponenty s uzlovými množinami $\{2, 5\}$ a $\{1, 3, 4\}$, kondenzace je na obrázku. Komponenty očíslováme podle věty o acyklických grafech:



$$G_1 = \{2, 5\}, G_2 = \{1, 3, 4\}.$$

3. Přečíslováme uzly souhlasně s očíslováním kvazikomponent, tj. nejprve uzly v G_1 , pak v G_2 (stará čísla uzlů jsou opět v závorkách a nová jsou tučně):



4. Porovnáním starých a nových čísel uzlů dostáváme permutaci π , která rozkládá matici \mathbf{A} :

Stará čísla uzlů	1	2	3	4	5
Nová čísla uzlů	3	1	4	5	2

5. Provedením permutace π na řádky a sloupce matice \mathbf{A} postupně dostaneme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

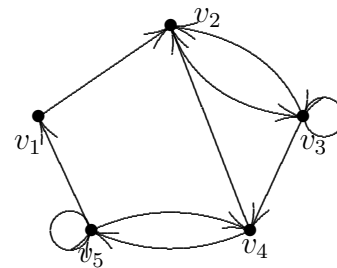
Rozložitelnost matic 3

Zjistěte, zda je matice \mathbf{A} rozložitelná nebo slabě rozložitelná, a pokud ano, najděte příslušnou permutaci řádků a sloupců.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

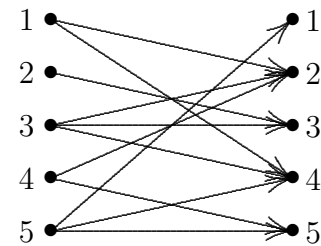
Řešení.

1. Sestrojíme diagram $\vec{G}(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} :



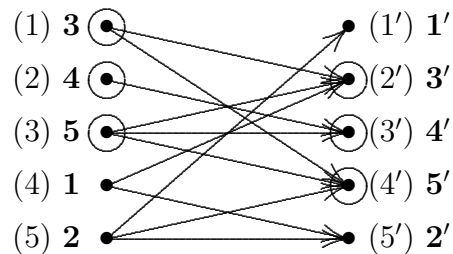
$\vec{G}(\mathbf{A})$ je silně souvislý a tedy \mathbf{A} je nerozložitelná.
Zjistíme tedy, jestli \mathbf{A} není alespoň slabě rozložitelná.

2. Sestrojíme bigraf $\vec{B}(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} :



Pro $S = \{1, 2, 3\}$ je $N(S) = \{2', 3', 4'\}$.
Tedy $|N(S)| \leq |S|$, tj. množina S je stabilní.

3. Přečíslovíme uzly $\vec{B}(\mathbf{A})$ tak, že nejprve číslujeme uzly mimo S (resp. mimo $N(S)$) a pak uzly v S (resp. v $N(S)$). Množiny S a $N(S)$ jsou označeny kroužky, stará čísla uzlů jsou opět v závorkách a nová jsou tučně.



4. Porovnáním starých a nových čísel uzlů dostáváme permutace, které rozkládají matici \mathbf{A} :

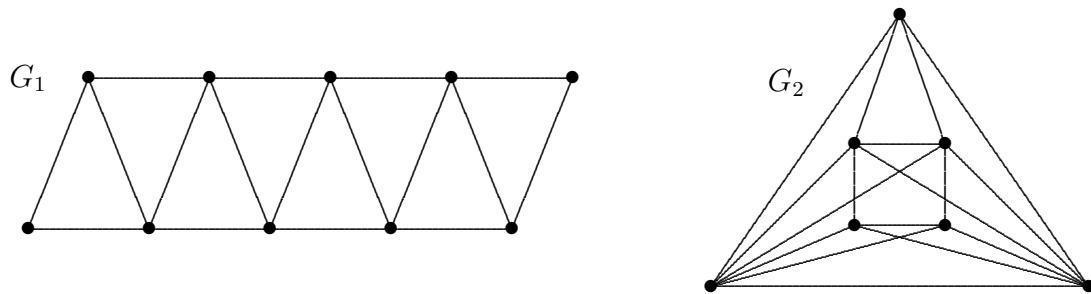
Řádky						Sloupce					
Stará čísla uzlů	1	2	3	4	5	Stará čísla uzlů	1	2	3	4	5
Nová čísla uzlů	3	4	5	1	2	Nová čísla uzlů	1	3	4	5	2

5. Provedením nalezených permutací na řádky a sloupce matice \mathbf{A} postupně dostaneme

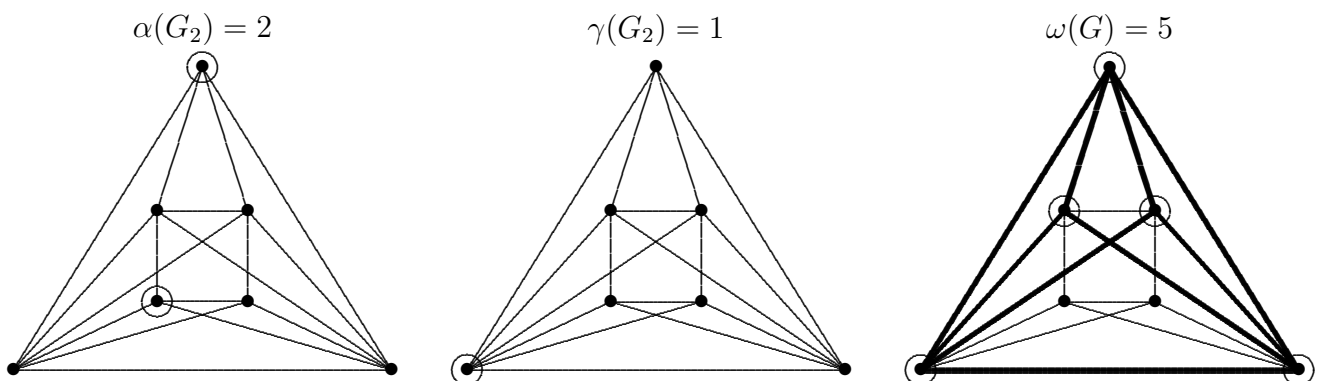
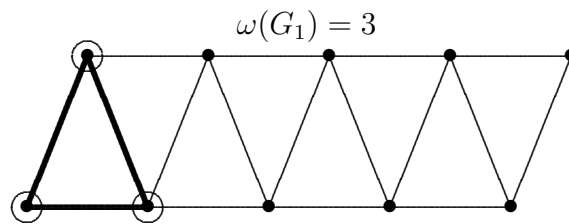
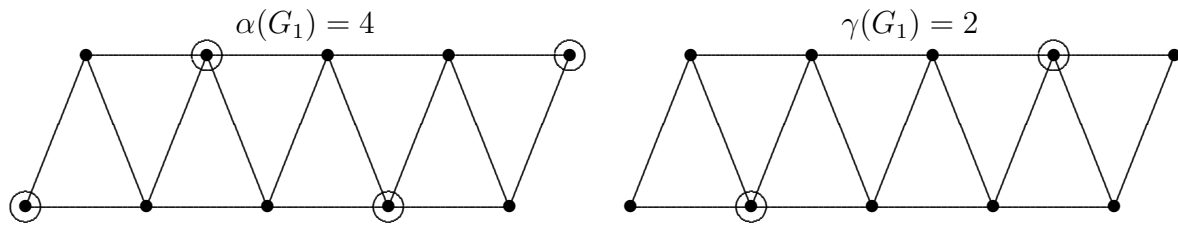
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nezávislost, dominance, klikovost

Určete nezávislost $\alpha(G)$, číslo dominance $\gamma(G)$ a klikovost $\omega(G)$ následujících grafů:

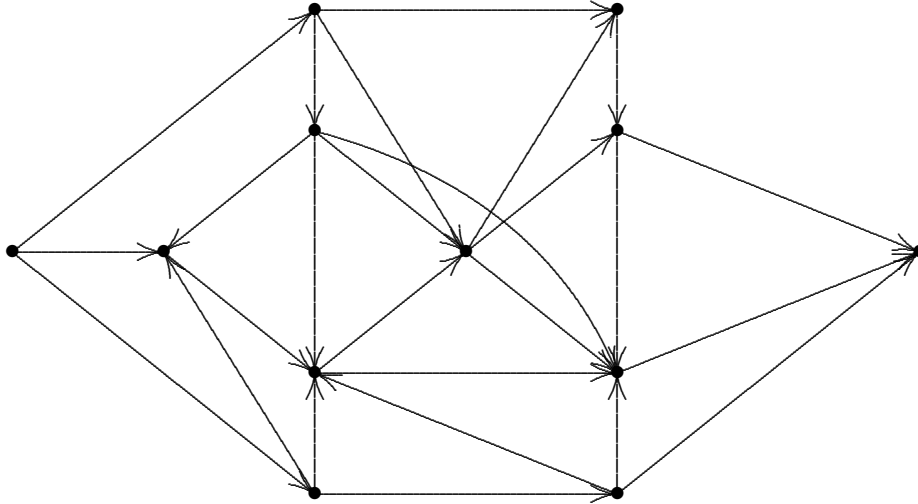


Řešení.



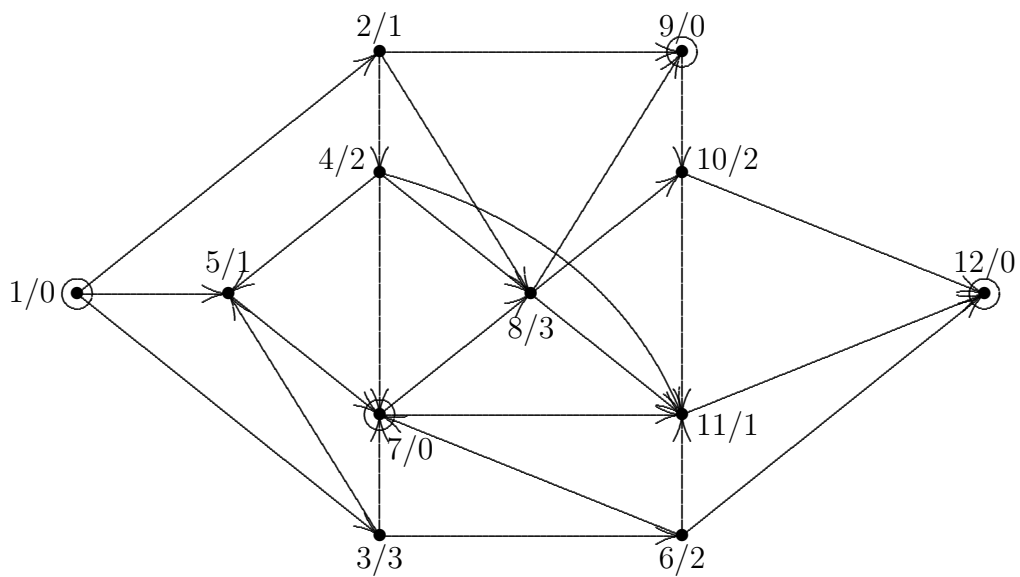
Jádro acyklického grafu

Najděte jádro následujícího grafu.



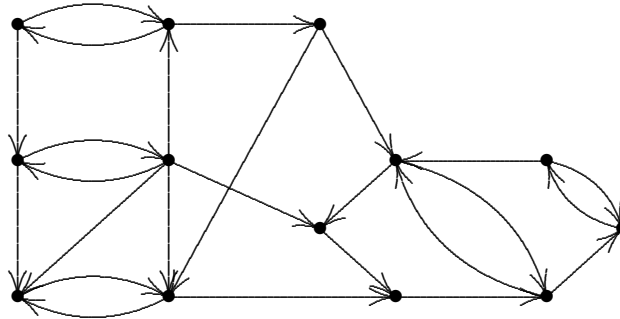
Řešení.

Značení uzlů je $i/f(i)$, kde i je pořadí uzlu v acyklickém číslování a $f(i)$ je hodnota Grundyho funkce i -tého uzlu. Uzly jádra jsou zakroužkovány.

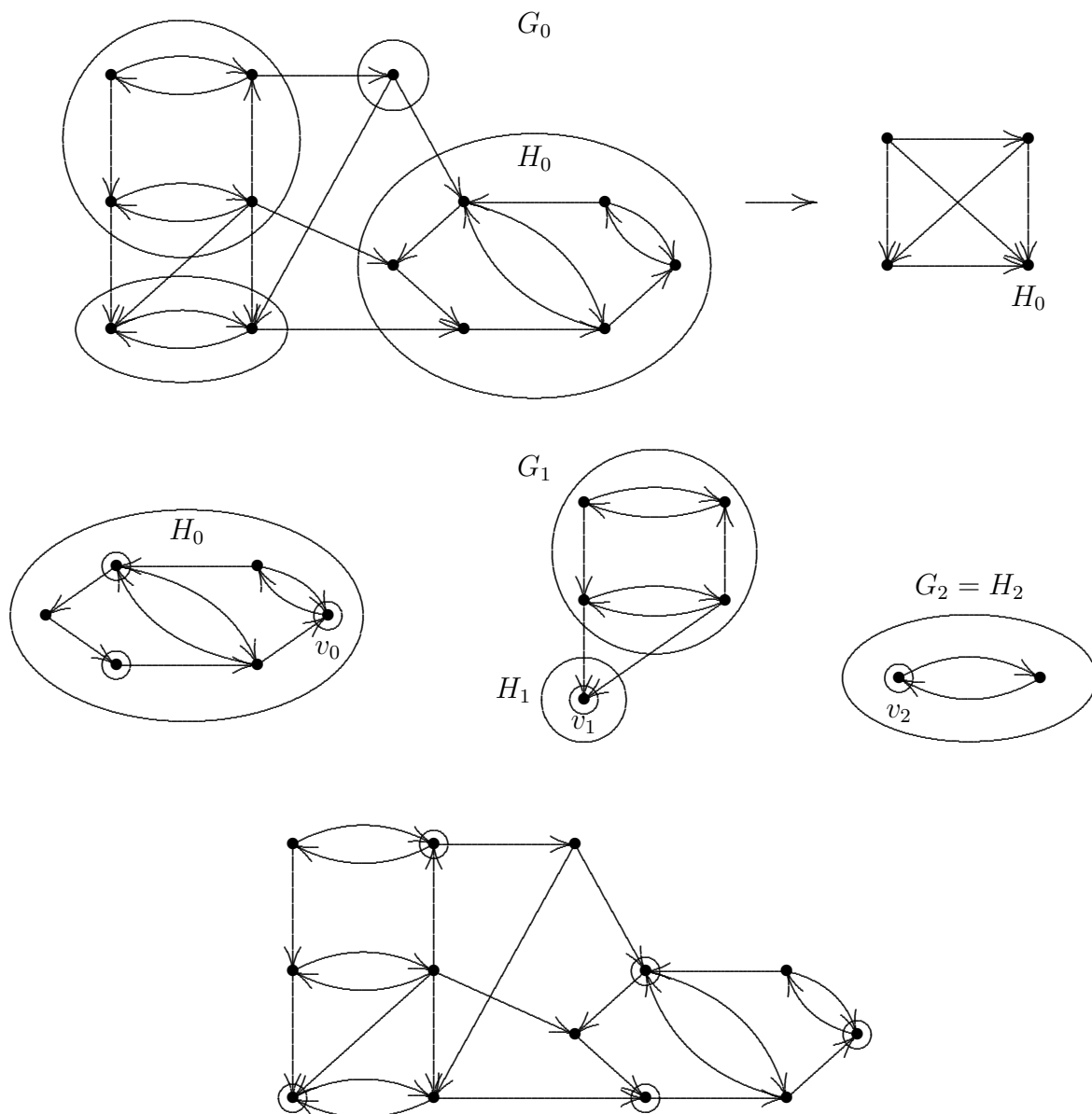


Jádro grafu bez lichých cyklů

Najděte jádro následujícího grafu.

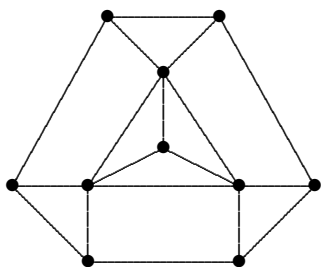


Řešení. Postup konstrukce jádra je popsán v důkazu Věty 6.9.

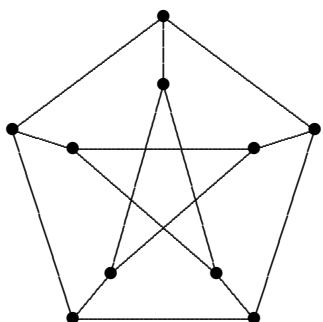


Barevnost 1

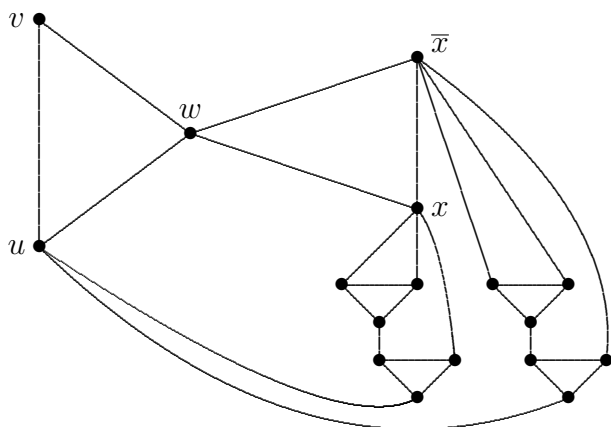
Určte chromatické číslo následujících grafů.



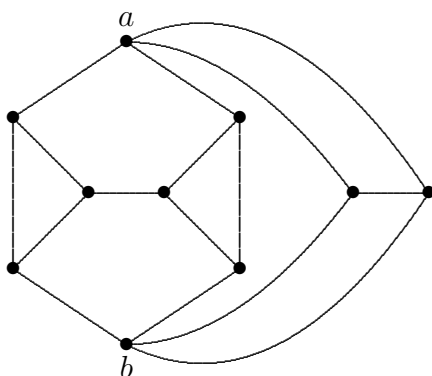
$\chi(G) \leq 4$ protože G je rovinný,
 $\chi(G) \geq \omega(G) = 4$,
 odtud $\chi(G) = 4$.



$\chi(G) \leq 3$ z Brooksovy věty,
 $\chi(G) \geq 3$ protože G má lichou kružnici,
 odtud $\chi(G) = 3$.



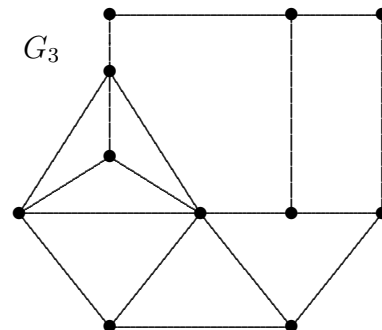
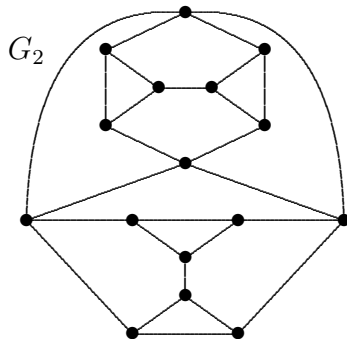
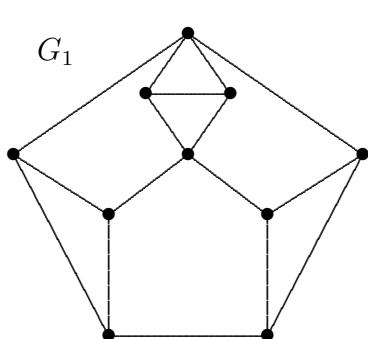
$\chi(G) \leq 4$ protože G je rovinný,
 $\chi(G) > 3$ protože G není 3-obarvitelný
 (odpovídá formuli $f(x) = x \wedge \bar{x}$, která není
 splnitelná – viz kap. 9.8, důkaz věty 9.11),
 tedy $\chi(G) = 4$.



$\chi(G) \leq 4$ protože G je rovinný,
 $\chi(G) \geq 3$ protože G má lichou kružnici,
 tedy $3 \leq \chi(G) \leq 4$.
 Ověřte si (probírkou všech možností) že
 G není 3-obarvitelný (návod: při barvení
 3 barvami musí a a b mít různé barvy).
 Tedy $\chi(G) = 4$.

Barevnost 2

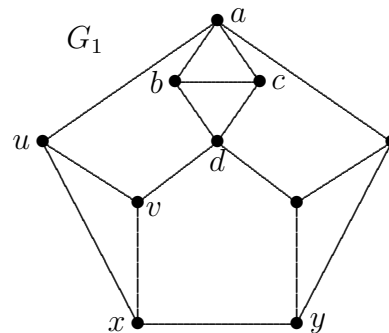
Určte chromatické číslo následujících grafů.



Řešení.

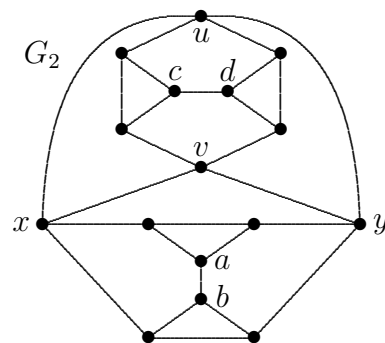
Zřejmě platí $3 \leq \chi(G_1) \leq 4$ ($\chi(G_1) \geq 3$ protože G_1 má lichou kružnici a $\chi(G_1) \leq 4$ protože G_1 je rovinný). Dokažte, že G_1 není 3-obarvitelný a tudíž $\chi(G_1) = 4$.

Návod: Při barvení 3 barvami mají a, b, c různé barvy, odkud $\chi(a) = \chi(d)$. Obdobně a, u a v mají různé barvy, tedy $\chi(a) = \chi(d) = \chi(x)$. Symetricky $\chi(a) = \chi(d) = \chi(y)$. Tedy $\chi(x) = \chi(y)$, což je spor na hraně xy .

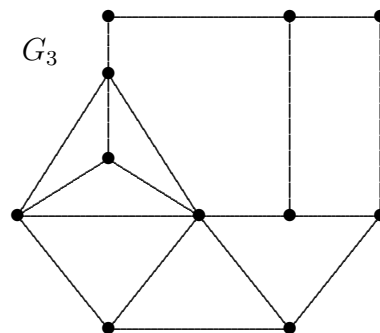


Opět $3 \leq \chi(G_2) \leq 4$. Hledáme 3-obarvení. Kdyby x a y měly stejnou barvu (dejme tomu 1), tak by i $\chi(a) = \chi(b) = 1$, což je spor na hraně ab . Tedy $\chi(x) \neq \chi(y)$. Pak ale u, v mají stejnou barvu a dostáváme obdobný spor na hraně cd .

Graf G_2 tedy není 3-obarvitelný a $\chi(G_2) = 4$.

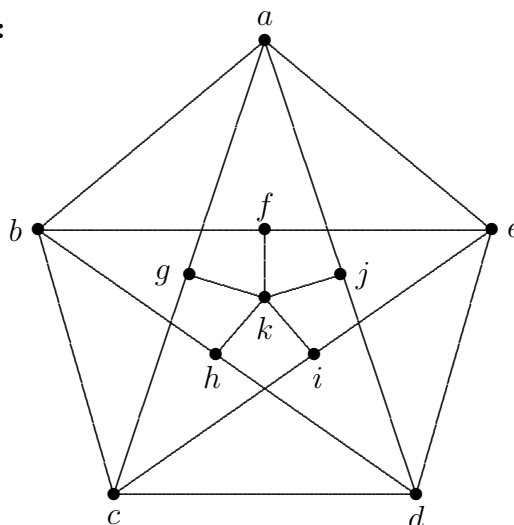


Máme $\chi(G_3) \leq 4$ protože G_3 je rovinný, a $\chi(G_3) \geq \omega(G_3) = 4$ protože G_3 obsahuje kliku velikosti 4. Tedy $\chi(G_3) = 4$.



Barevnost 3

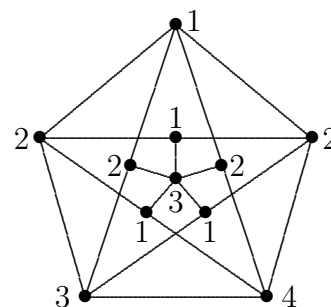
Určte chromatické číslo následujícího grafu:



Řešení.

Graf G má lichou kružnici, tudíž $\chi(G) \geq 3$. Snadno najdeme 4-obarvení (viz obrázek). Dokážeme, že neexistuje 3-obarvení.

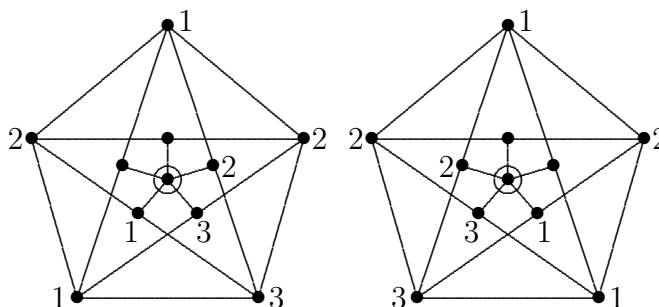
Bez újmy na obecnosti položme $\chi(a) = 1$ a $\chi(b) = 2$. Z $\chi(a) = 1$ plyne, že $\chi(e) = 2$ nebo $\chi(e) = 3$.



Případ 1: $\chi(e) = 2$. Pak $\{\chi(c), \chi(d)\} = \{1, 3\}$.

(i) Je-li $\chi(c) = 1$ a $\chi(d) = 3$, pak $\chi(h) = 1$, $\chi(i) = 3$ a $\chi(j) = 2$. Uzel k pak nelze obarvit žádnou z barev 1, 2, 3, což je spor.

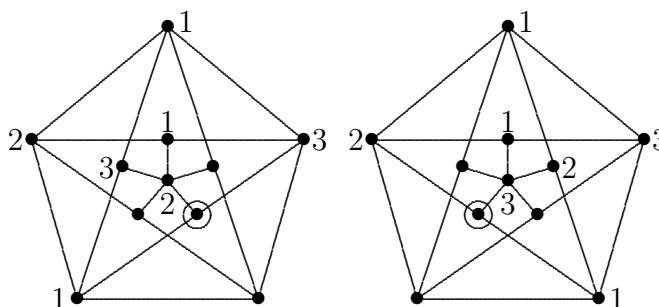
(ii) Případ $\chi(c) = 3$ a $\chi(d) = 1$ je symetrický.



Případ 2: $\chi(e) = 3$. Pak $\chi(f) = 1$, a $\chi(k) = 2$ nebo $\chi(k) = 3$.

(i) Je-li $\chi(k) = 2$, pak $\chi(g) = 3$, odkud $\chi(c) = 1$, a uzel i nelze obarvit žádnou z barev 1, 2, 3.

(ii) Je-li $\chi(k) = 3$, pak $\chi(j) = 2$, odkud $\chi(d) = 1$, a uzel h nelze obarvit žádnou z barev 1, 2, 3.



Graf G tedy není 3-obarvitelný a $\chi(G) = 4$.

SAT \triangleleft IND

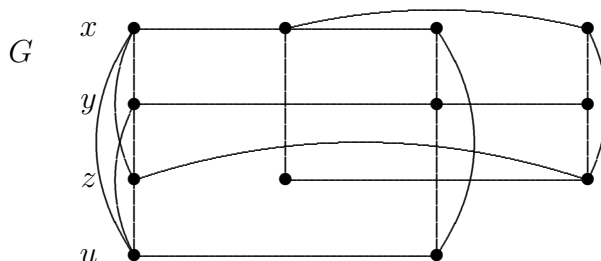
(splnitelná formule)

Je dána logická formule $f(x, y, z, u) = (x \vee y \vee \bar{z} \vee u) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{u}) \wedge (x \vee y \vee z)$.

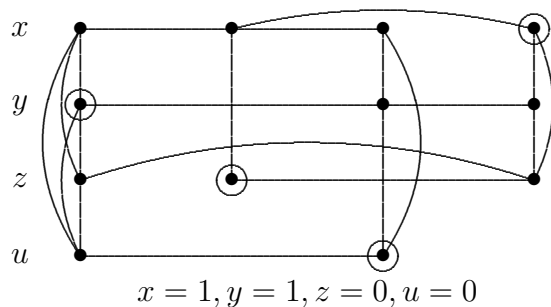
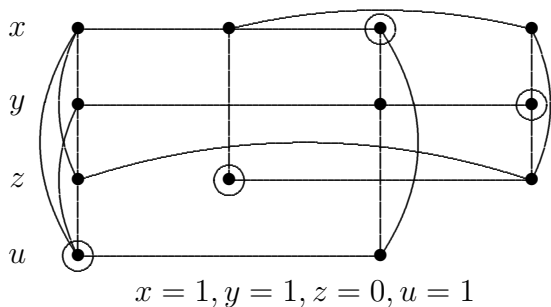
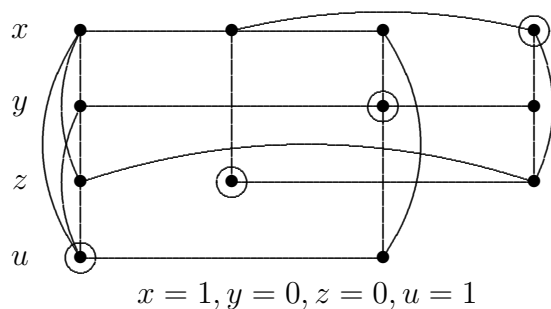
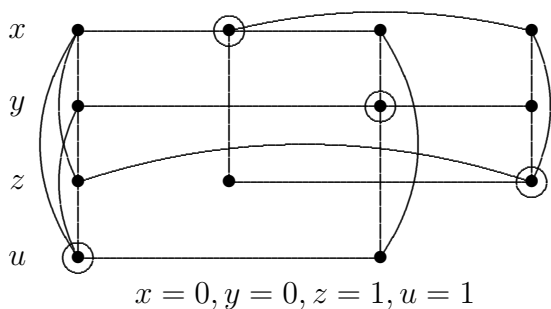
Rozhodněte zda je f splnitelná převodem na nezávislost grafu.

Řešení.

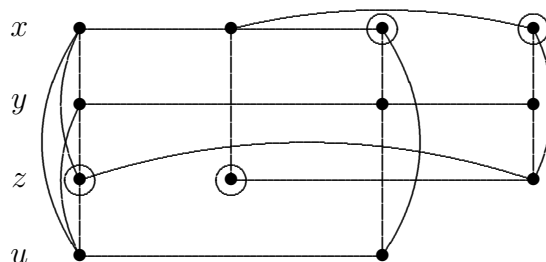
Formuli f odpovídá následující graf:



Formule f má 4 klauzule, a tedy f je splnitelná právě když v grafu G existuje nezávislá množina velikosti 4. Takových nezávislých množin je v G více, některé z nich jsou (spolu s odpovídajícími splňujícími přiřazeními) zakroužkovány na následujícím obrázku.



Poznamenejme ještě, že například pro nezávislou množinu (velikosti 4) na obrázku vpravo dostáváme pouze $z = 0$ a $x = 1$, a hodnoty proměnných y a u nejsou touto množinou jednoznačně určeny. To znamená, že všechna přiřazení s $z = 0$ a $x = 1$ jsou splňující.



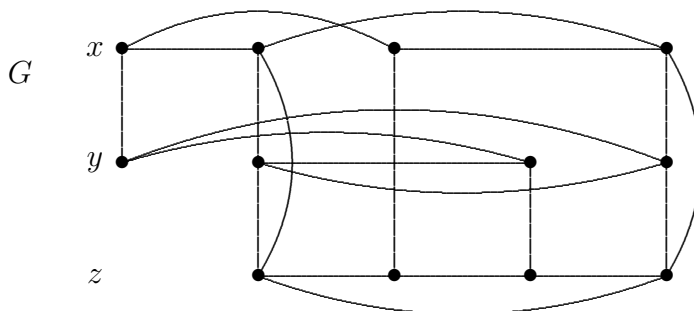
SAT \triangleleft IND

(nesplnitelná formule)

Je dána logická formule $f(x, y, z) = (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{z}) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$.
Rozhodněte, zda je f splnitelná převodem na nezávislost grafu.

Řešení.

Formuli f odpovídá následující graf:



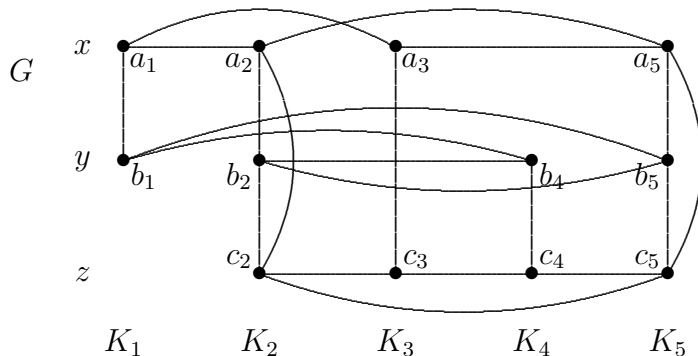
Formule f má 5 klauzulí, a tedy f je splnitelná právě když v grafu G existuje nezávislá množina velikosti 5.

Takovou nezávislou množinu se nedaří nalézt; to však není důkaz. K důkazu nespílitelnosti formule f je třeba dokázat, že v G *neexistuje* nezávislá množina velikosti 5. Vzhledem k tomu, že není známa dobrá charakteristika, nezbývá než provést probírku všech možností.

To lze provést například následující úvahou.

Označíme K_i kliku v grafu G , odpovídající i -té klauzuli formule f , a uzly kliky K_i (odpovídající literálům proměnných x, y, z) označíme a_i, b_i, c_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ (viz obrázek).

Kdyby v G existovala nezávislá množina A velikosti 5, musela by obsahovat z každé z klik K_1, \dots, K_5 právě jeden uzel.



Z kliky K_1 tedy dostáváme 2 možnosti:

1. případ: $a_1 \in A$. Pak $a_2 \notin A$ a $a_3 \notin A$. Z K_3 dostáváme $c_3 \in A$, odkud $c_2 \notin A$ a $c_4 \notin A$. Protože $a_2 \notin A$ a $c_2 \notin A$, z K_2 musí být $b_2 \in A$. Pak ale nutně $b_4 \notin A$ a to je spor, protože nelze současně $b_4 \notin A$ i $c_4 \notin A$ (kliky K_4 by neobsahovala žádný uzel množiny A).

2. případ: $b_1 \in A$. Pak $b_4 \notin A$ a $b_5 \notin A$; z K_4 plyne $c_4 \in A$, odkud $c_5 \notin A$ a $c_3 \notin A$. V K_5 máme $b_5 \notin A$ a $c_5 \notin A$, tedy $a_5 \in A$, odkud $a_3 \notin A$, a to je opět spor, neboť K_3 by neobsahovala žádný uzel množiny A .

Obě možnosti vedou ke sporu, množina A tedy neexistuje.

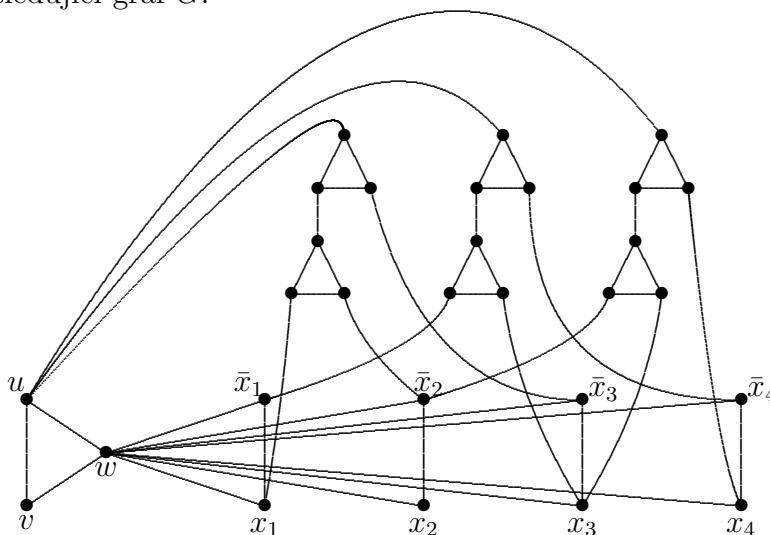
3-SAT \triangleleft 3-COL

Je dána logická formule $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)$.

Rozhodněte, zda je f splnitelná převodem na 3-obarvitelnost grafu.

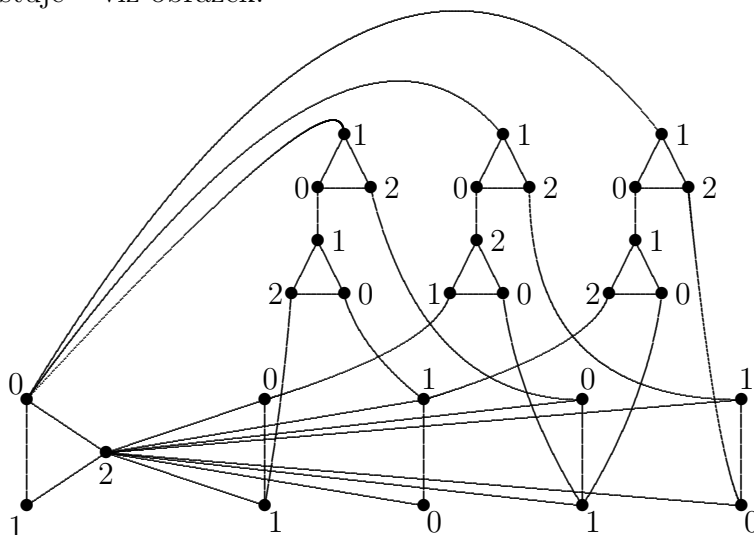
Řešení.

Formuli f odpovídá následující graf G :



Formule f je splnitelná, právě když G je 3-obarvitelný, a G je 3-obarvitelný, právě když existuje takové 3-obarvení G , při němž u má barvu 0, v má barvu 1 a w má barvu 2.

Takové obarvení ale existuje – viz obrázek:



Formule f je tedy splnitelná.

(Poznamenejme, že díky předepsanému obarvení uzlu w barvou 2 dávají barvy uzlů x_1, x_2, x_3, x_4 příslušné splňující přiřazení).