Kapitola 3.

Řady

Definice 3.1. (číselná řada)

Mějme posloupnost $\{a_n\}$ reálných čísel.

Symbol $\quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \quad$ se nazývá nekonečná řada.

Čísla a_n se nazývají členy řady.

Posloupnost $\{s_n\}$, kde $s_n = a_1 + a_2 + \ \ldots\ + a_n$, se nazývá posloupnost částečných součtů řady.

$$\left(\textit{nemůže-li dojít k záměně, připouštíme zápis:} \quad \sum a_n \right)$$

Definice 3.2. (konvergentní a divergentní řada)

Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ se nazývá konvergentní, je-li konvergentní její posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$.

$$\left(\textit{píšeme} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = s, \textit{ kde } s \textit{ nazýváme součet řady} \right)$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ se nazývá divergentní, je-li divergentní její posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$.

$$\left(\textit{píšeme} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \textit{ diverguje, nebo} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \pm\infty \right)$$

Věta 3.3. (operace s konvergentními řadami)

Jsou-li konvergentní řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = b$, potom

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\alpha a_n + \beta b_n\big) = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \alpha\, a + \beta\, b, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Věta 3.4. (nutná podmínka konvergence)

Je-li řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní, potom $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Věta 3.5. (srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou řady, pro jejichž členy platí nerovnost

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Potom

1. když konverguje $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, konverguje také $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$,
2. když diverguje $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, diverguje také $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Definice 3.6. (majoranta a minoranta)

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou řady, pro jejichž členy platí nerovnost

$$0 \leq a_n \leq b_n \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N}.$$

Potom

1. řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ se nazývá <u>majorantou</u> řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$,
2. řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se nazývá <u>minorantou</u> řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Věta 3.7. (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou řady, pro jejichž členy platí

$$a_n \geq 0 \quad \text{pro s.v. } n \in \mathbb{N} \quad \text{a} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ b_n > 0.$$

Pokud existuje limita

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0,$$

potom

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje,
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje právě tehdy, když $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje.

Věta 3.8. (limitní d'Alembertovo kritérium)

Nechť existuje limita $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Pak platí:

1. Je-li $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Je-li $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.

Věta 3.9. (limitní Cauchyovo kritérium)

Nechť existuje limita $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Pak platí:

1. Je-li $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.
2. Je-li $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, potom řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje.