Kapitola X. Základní pojmy

Karta X.0.'.' (úvodem)

▷ struktura matematického textu:

axióm, **definice**, $\underbrace{\textbf{věta}, \textbf{tvrzení}, \textbf{lemma}, \textbf{důsledek}}_{\textbf{důkaz}}$, **poznámka**, **příklad**

▷ postulát:

(i) Zápisem $a \neq b$ rozumíme, že a i b existují a nerovnají se.
(alternativní interpretace … není pravda, že se rovnají … připouští i neexistenci)

(ii) Hovoříme-li o množině, vždy máme na mysli množinu neprázdnou … není-li řečeno jinak.

(iii) Hovoříme-li o vybírámí prvků x_1, x_2, x_3, … z množiny, tak je vždy z čeho vybírat.

(iv) Rozlišujeme mezi pojmy načrtnutý a sestrojený (nakreslený, namalovaný, narýsovaný) graf

- **sestrojený graf**: *vypočtené hodnoty, tabulka a přesné vynesení do grafu.*
- **načrtnutý graf**: *je otázkou citu; musí respektovat významné hodnoty, zároveň ale poskytuje informaci o monotonii, diferencovatelnosti, extrémech, periodicitě, chování v nekonečnu atd. … prostě informuje o všem co nás zajímá … tj.* 'z načrtnutého grafu je vidět …' *;)*

Karta X.0.”.” (karta - výroky)

▷ **výrok**: pro nás jakékoli tvrzení, u kterého má smysl zabývat se otázkou, zda je či není pravdivé
(podle toho pak výrok budeme nazývat pravdivým nebo nepravdivým)

▷ **výroková forma**: je jakékoli tvrzení $V(x)$ obsahující jednu nebo více proměnných x, které se po dosazení přípustných hodnot stává výrokem.

▷ logické spojky:

$\bar{A}$, $\neg A$	**negace**	*čteme:*	*negace A …*
$A \wedge B$	**konjunkce**		*A a zároveň B …*
$A \vee B$	**disjunkce**		*A nebo B …*
$A \Rightarrow B$	**implikace**		*z A plyne B …, nebo jestliže A, pak B …*
$A \Leftrightarrow B$	**ekvivalence**		*A je ekvivalentní s B …, nebo A právě tehdy když B …*

▷ podmínky:

A je **nutnou podmínkou** pro B, pokud B nemůže platit, aniž by platilo A	$A \Leftarrow B$
A je **postačující podmínkou** pro B, pokud B platí vždy, když platí A	$A \Rightarrow B$
A je **nutnou a postačující podmínkou** pro B, pokud B platí právě tehdy, když platí A	$A \Leftrightarrow B$

▷ kvantifikátory:

$\forall$	**obecný kvantifikátor**	*čteme:*	*pro každé …*, nebo *pro všechna …*
$\exists$	**existenční kvantifikátor**		*existuje …*, nebo *existuje alespoň jeden …*
$\exists!$			*existuje právě jeden …*

▷ **kvantifikované výroky**:

$\forall x \in D : V(x)$	*čteme:*	*pro každé x z D platí $V(x)$*
$\exists x \in D : V(x)$		*existuje x z D takové, že platí $V(x)$*
$\exists! x \in D : V(x)$		*existuje právě jedno x z D takové, že platí $V(x)$*

Karta X.0.”’.”’ (karta - množiny)

▷ **možina**: pojem nedefinujeme, pouze citujeme: „*Množina je souhrn objektů, které jsou přesně určené a rozlišitelné a tvoří součást světa našich představ a myšlenek; tyto objekty nazýváme prvky množiny.*“ Georg Cantor

▷ **operace s možinami**:

$$x \in A, \quad x \notin A \quad \dots \quad x \textit{ je prvkem resp. } x \textit{ není prvkem množiny } A$$

$$\begin{aligned}
A \subset B &\Leftrightarrow \big(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B\big) && \textit{čteme: } A \textit{ je podmnožinou } B,\\
A = B &\Leftrightarrow \big(\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B\big) && A \textit{ je rovno } B,\\
A \cup B &= \big\{x : x \in A \vee x \in B\big\} && A \textit{ sjednoceno s } B,\\
A \cap B &= \big\{x : x \in A \wedge x \in B\big\} && A \textit{ průnik } B,\\
A - B &= \big\{x : x \in A \wedge x \notin B\big\} && A \textit{ mínus } B.
\end{aligned}$$

▷ **množina všech reálných čísel**: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ tj. $-\infty \notin \mathbb{R}$, $+\infty \notin \mathbb{R}$,

(*existuje také rozšířená množina všech reálných čísel:* $\mathbb{R}^* = \langle -\infty, +\infty \rangle$, *kde* $\pm\infty \in \mathbb{R}^*$)

▷ podmnožiny $\mathbb{R}$:

$\mathbb{N}$	**množina všech přirozených čísel**,	$1, 2, 3, \dots,$
$\mathbb{N}_0$	**množina všech přirozených čísel a nuly**,	$0, 1, 2, 3, \dots,$
$\mathbb{Z}$	**množina všech celých čísel**,	$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots,$
$\mathbb{Q}$	**množina všech racionálních čísel**,	$\frac{1}{2}, \frac{22}{7}, 8, -12$
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	**množina všech iracionálních čísel**,	$\pi, \sqrt{2}, \sin 3, \dots$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

(a, b) **otevřený interval**

$(a, b\rangle$ zleva otevřený, zprava uzavřený

$\langle a, b)$ zleva uzavřený, zprava otevřený

$\langle a, b\rangle$ **uzavřený interval**

$(a, +\infty)$ $\langle a, +\infty)$ $(-\infty, b\rangle$ $(-\infty, b)$ $(a, \cancel{+\infty}\rangle$ $\langle a, \cancel{+\infty}\rangle$ $\langle \cancel{-\infty}, b\rangle$ $\langle \cancel{-\infty}, b)$

okolí bodu c

$$U(c) = (c - \delta, c + \delta)$$

prstencové okolí bodu c

$$P(c) = (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)$$

▷ zajímavé množiny: **TRIAL → POMŮCKY → HERBÁŘE → MNOŽINY**

Definice X.1. (body množiny)

Mějme neprázdnou množinu $A \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že

i) bod $c \in A$ je **vnitřní bod** A, jestliže existuje jeho okolí takové, že $U(c) \subset A$,

ii) bod $c \in A$ je **izolovaný bod** A, jestliže existuje jeho prstencové okolí takové, že $P(c) \cap A = \emptyset$,

iii) bod $c \in \mathbb{R}^*$ je **hromadný bod** A, jestliže pro každé jeho prstencové okolí platí $P(c) \cap A \neq \emptyset$,

iv) bod $c \in \mathbb{R}^*$ je **hraniční bod** A, jestliže pro každé jeho okolí platí $U(c) \not\subset A \wedge U(c) \cap A \neq \emptyset$.

uzávěr množiny: $$\bar{A} = \overbrace{\operatorname{Int} A}^{\textbf{vnitřek množiny} \text{ ... množina všech vnitřních bodů}} \cup \underbrace{\partial A}_{\textbf{hranice množiny} \text{ ... množina všech hraničních bodů}}$$

Definice X.2. (SPOČETNÁ a NESPOČETNÁ množina)

Řekneme, že neprázdná množina $A \subset \mathbb{R}$ je:

i) **konečná**, jestliže má konečný počet prvků,

ii) **nekonečná**, jestliže není konečná

   (a) **spočetná**, pokud není konečná, ale každému jejímu prvku lze přiřadit právě jeden prvek množiny $\mathbb{N}$.

   (b) **nespočetná**, pokud není konečná ani spočetná.

(*o množině, která je buď konečná nebo spočetná hovoříme jako o množině nejvýše spočetné.*)

Definice X.3. (omezená množina)

Řekneme, že neprázdná množina $A \subset \mathbb{R}$ je

i) **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $m \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in A: \ x \geq m$,

ii) **omezená shora**, jestliže existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in A: \ x \leq M$.

Konečně A je **omezená množina**, pokud je omezená zdola i shora.

Definice X.4. (minimum a maximum množiny)

Řekneme, že neprázdná množina $A \subset \mathbb{R}$ má

i) **minimum**, jestliže existuje číslo $a \in A$ takové, že $\forall x \in A: \; x \geq a$

ii) **maximum**, jestliže existuje číslo $b \in A$ takové, že $\forall x \in A: \; x \leq b$

$$\left(\textit{píšeme:} \qquad \min A = a, \quad \max A = b \right)$$

Definice X.5. (INFIMUM a SUPREMUM množiny)

Řekneme, že neprázdná množina $A \subset \mathbb{R}$ má

i) **infimum**, jestliže existuje číslo $\alpha \in \mathbb{R}^*$ takové, že $\forall x \in A: \; x \geq \alpha$ a zároveň platí:

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}: \; x_1 > \alpha \;\Rightarrow\; \exists x \in A: \; x < x_1$$

ii) **supremum**, jestliže existuje číslo $\beta \in \mathbb{R}^*$ takové, že $\forall x \in A: \; x \leq \beta$ a zároveň platí:

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}: \; x_1 < \beta \;\Rightarrow\; \exists x \in A: \; x > x_1$$

$$\left(\textit{píšeme:} \qquad \inf A = \alpha, \quad \sup A = \beta \right)$$

Věta X.6. (vlastnosti inf, sup, min, max)

Mějme neprázdné množiny $A, B \subset \mathbb{R}$.

i) A má vždy právě jedno $\begin{cases} \text{infimum} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \exists! \inf A \\ \text{supremum} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \exists! \sup A \end{cases}$

ii) $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \inf A \leq \sup A$

iii) pokud $A \subset B$, potom $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \inf A \geq \inf B \\ \sup A \leq \sup B \end{cases}$

iv) pokud A má minimum a maximum, potom $\ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} \min A = \inf A \\ \max A = \sup A \end{cases}$

v) A není omezená $\begin{cases} \text{zdola} & \text{právě tehdy, když} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \inf A = -\infty \\ \text{shora} & \text{právě tehdy, když} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \sup A = +\infty \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{c} \textit{v případě neexistence minima nebo maxima píšeme:} \\ \nexists \min A; \quad \nexists \max A; \quad \cancel{\min A = -\infty}; \quad \cancel{\max A = +\infty}; \end{array} \right)$$

X.100. NÁHLEDY ...