Kapitola 7. Integrály - neurčité

Karta 7.0.' (karta - neurčité integrály)

1. $\displaystyle\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & \alpha \in \mathbb{N}, \\ x \neq 0, & \alpha \in \mathbb{Z},\ \alpha \neq -1, \\ x > 0, & \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1, \end{cases}$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0,$

3. $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

4. $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, \qquad x \in \mathbb{R},\ a \neq 1,\ a > 0,$

5. $\displaystyle\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

6. $\displaystyle\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + C, \qquad x \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z},$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + C, \qquad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C, \qquad x \in (-1, 1),$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

11. $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

12. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2 x} \,\mathrm{d}x = \operatorname{tgh} x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

14. $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotgh} x + C, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{argcosh} x + C, \qquad x \in (1, +\infty),$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x = \operatorname{argsinh} x + C, \qquad x \in \mathbb{R},$

---

100. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{x : f(x) = 0\},$

101. $\displaystyle\int f'(x) \,\mathrm{d}x = f(x) + C, \qquad \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x).$

Definice 7.1. (PRIMITIVNÍ FUNKCE)

Nechť jsou funkce f a F definované na intervalu (a, b).

Řekneme, že F je **primitivní funkcí** k funkci f, jestliže

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Věta 7.2. (existence primitivní funkce)

Ke každé funkci f, spojité na intervalu (a, b), existuje na tomto intervalu primitivní funkce F.

Věta 7.3. (vlastnosti primitivní funkce)

Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b).

Potom:

1. Funkce F je na (a, b) spojitá. *(dokonce diferencovalená ;)*
2. Každá funkce $G(x) = F(x) + C$, kde C je reálná konstanta, je také primitivní funkcí k f na (a, b).
3. Každou primitivní funkci k f na (a, b) lze zapsat ve tvaru $F(x) + C$, kde C je reálná konstanta.

Definice 7.4. (NEURČITÝ INTEGRÁL)

Neurčitým integrálem funkce f na intervalu (a, b)

nazveme množinu všech primitivních funkcí k funkci f na (a, b), kterou značíme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \Big\{ F(x) + C;\ C \in \mathbb{R},\ F(x) \text{ je primitivní funkce k } f(x) \Big\}.$$

$$\Big(\textit{proces hledání } F \textit{ nazýváme integrování a připouštíme zápis: } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} \Big)$$

Věta 7.6. (integrace součtu, rozdílu a násobku)

Nechť jsou funkce f a g spojité na intervalu (a, b).

Potom na tomto intervalu platí:

$$\int f(x) \pm g(x)\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int \alpha \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = \alpha \cdot \int f(x)\ \mathrm{d}x \qquad (\textit{ kde } \alpha \neq 0 \textit{ je reálná konstanta })$$

Věta 7.7. (integrace součinu (¡i¿per partes¡/i¿))

Pro funkce u a v, které mají na intervalu (a, b) spojité první derivace u' a v', platí:

$$\int u(x)v'(x)\ \mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\ \mathrm{d}x.$$

Věta 7.9. (integrace substitucí)

Nechť a) funkce f je spojitá na intervalu (a, b)
b) funkce φ má spojitou první derivaci φ' na intervalu (α, β)
c) $H(\varphi) \subset (a, b)$.

Potom pro $x \in (a, b)$ a $t \in (\alpha, \beta)$ platí:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ccc} x & = & \varphi(t) \\ \mathrm{d}x & = & \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int f\Big(\varphi(t)\Big) \cdot \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

Karta 7.10. (... integrály typu R(•))

Formálně uvažujme racionální lomené funkce (podíl polynomů)

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad \text{resp. } R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$*$ **Integrály typu** $\int R(\, x \,)\, \mathrm{d}x$

Funkci $R(x)$ rozložíme na součet parciálnách zlomků:

$$\frac{A}{x-x_0}, \qquad \frac{A}{(x-x_0)^k}, \qquad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$

kde A, B, x_0, p, q jsou reálná čísla ($p^2 - 4q < 0$) a $k = 2, 3, 4, \ldots$.

$*$ **Integrály typu** $\int R(\, \mathrm{e}^x \,)\, \mathrm{d}x$

volíme substituci: $t = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$.

$*$ **Integrály typu** $\int R(\, \ln x \,) \frac{\mathrm{d}x}{x}$

volíme substituci: $t = \ln x$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$.

$*$ **Integrály typu** $\int R\,(\, \sin x,\, \cos x \,)\, \mathrm{d}x$

volíme buď pracnou za to však univerzální substituci: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, kde nahrazujeme:

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\, \mathrm{d}t,$$

nebo méně pracné, ale také méně univerzální substituce:

$$\begin{array}{llcrcr}
\text{a)} & t = \operatorname{tg} x & \Longleftrightarrow & R\,(-\sin x,\, -\cos x\,) & = & R\,(\sin x,\, \cos x\,) \\
\text{b)} & t = \cos x & \Longleftrightarrow & R\,(-\sin x,\, \cos x\,) & = & -R\,(\sin x,\, \cos x\,) \\
\text{c)} & t = \sin x & \Longleftrightarrow & R\,(\sin x,\, -\cos x\,) & = & -R\,(\sin x,\, \cos x\,)
\end{array}$$

$*$ **Integrály typu** $\int R\left(x,\, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) \mathrm{d}x$

volíme substituci: $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, čili $x = \dfrac{dt^n - b}{a - ct^2}$.

Karta 7.11. (... racionální lomená funkce)

Integrujeme $\displaystyle\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x = \dots$ kde $\begin{cases} P_m(x) \text{ je polynom stupně } m, \\ Q_n(x) \text{ je polynom stupně } n. \end{cases}$

1. Pokud je $m \geq n$, dělíme polynom $P_m(x)$ polynomem $Q_n(x)$
$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$$
2. $M(x)$ je polynom, který snadno integrujeme.
3. Protože $k < n$, rozložíme $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ na parciální zlomky.
Existují právě 4 typy parciálních zlomků (tj. žádné jiné)
$$\frac{A}{x-x_0}, \qquad \frac{A}{(x-x_0)^k}, \qquad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \qquad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k},$$
kde A, B, x_0, p, q jsou reálná čísla ($p^2 - 4q < 0$) a $k = 2, 3, 4, \dots$.
   (a) reálný kořen x_0 násobnosti jedna:
   $$\int \frac{A}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = A \ln|x-x_0| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
   (b) reálný kořen x_0 násobnosti k:
   $$\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{k-1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
   (c) komplexně sdružené kořeny násobnosti jedna:
   $$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$
   (d) komplexně sdružené kořeny násobnosti k: *(s využitím rekurentních vzorců)*
   $$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = \frac{A}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{(x^2+px+q)^k}$$
   a tedy:
   $$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-k}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$
   $$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(k-1)(4q-p^2)}\left(\frac{2x+p}{x^2+px+q} + (4k-6)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}\,\mathrm{d}x\right)$$

symbolicky lze strukturu výpočtu naznačit takto ...
$$\begin{aligned}
\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x &= \int M(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int M(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{A}{x-x_0} + \frac{A}{(x-x_0)^k} + \frac{Ax+B}{x^2+px+q} + \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int M(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{A}{x-x_0}\,\mathrm{d}x + \int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x + \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x + \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$
... přičemž cílem bylo problém osvětlit a zároveň nikoho nevyděsit ;)

Karta 7.12. (… různé)

∗ **zajímavá užití per partes**

1. K hledání primitivních funkcí k funkcím typu:

$$x^n e^{kx}, \quad x^n \ln x, \quad x^n \cos \omega x, \quad x^n \sin \omega x, \quad x^n \arcsin x, \quad x^n \arccos x, \quad \ldots$$

Lze odvodit i takové krásné *(inženýrské)* vzorce jako:

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} \cos \omega x \; dx &= \frac{e^{\alpha x}(\omega \sin \omega x + \alpha \cos \omega x)}{\alpha^2 + \omega^2} + C, \\ \int e^{\alpha x} \sin \omega x \; dx &= \frac{e^{\alpha x}(\alpha \sin \omega x - \omega \cos \omega x)}{\alpha^2 + \omega^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Odvození rekurentních formulí integrováním per partes pro $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} J_{n+2} &= \tfrac{1}{n+2} \cos^{n+1} x \sin x + \tfrac{n+1}{n+2} J_n, \quad \text{kde} \quad J_n = \int \cos^n x \, \mathrm{d}x, \\ J_{n+2} &= -\tfrac{1}{n+2} \sin^{n+1} x \cos x + \tfrac{n+1}{n+2} J_n, \quad \text{kde} \quad J_n = \int \sin^n x \, \mathrm{d}x, \\ J_{n+1} &= \tfrac{1}{2n} \left(\tfrac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1) J_n \right), \quad \text{kde} \quad J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}. \end{aligned}$$

∗ **Integrály typu** $\int \cos mx \cos nx \, \mathrm{d}x$, $\int \sin mx \cos nx \, \mathrm{d}x$, $\int \sin mx \sin nx \, \mathrm{d}x$.

S využitím známých součtových vzorců:

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cos nx \; dx &= \frac{1}{2} \int \Big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x \Big) \, \mathrm{d}x, \\ \int \sin mx \cos nx \; dx &= \frac{1}{2} \int \Big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x \Big) \, \mathrm{d}x, \\ \int \sin mx \sin nx \; dx &= \frac{1}{2} \int \Big(-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x \Big) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

∗ **Integrály typu** $\int \cos^2 x \, \mathrm{d}x$, $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$

Jinak nezajímavé, ale právě zde mimořádně užitečné součtové vzorce:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}.$$

7.100. NÁHLEDY …