Kapitola 5. Spojitost

Definice 5.1. (SPOJITÁ, zleva, zprava, polospojitá)

Řekneme, že funkce f je v bodě $c \in D(f)$:

$$\textbf{spojitá}, \text{ jestliže } \lim_{x \to c} f(x) = f(c),$$

$$\textbf{spojitá zleva}, \text{ jestliže } \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c),$$

$$\textbf{spojitá zprava}, \text{ jestliže } \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c),$$

$$\textbf{polospojitá zdola}, \text{ jestliže } \underline{\lim}_{x \to c} f(x) \geq f(c),$$

$$\text{a } \textbf{polospojitá shora}, \text{ jestliže } \overline{\lim}_{x \to c} f(x) \leq f(c).$$

Definice 5.2. (spojitá na množině)

V bodě x_0, který je **izolovaným bodem** D(f) považujeme funkci f za spojitou.

Řekneme, že funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** (a, b), jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.

Řekneme, že funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle a, b \rangle$, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, přičemž v bobě a je spojitá zprava a v bodě b zleva.

Řekneme, že funkce f je **spojitá na množině** M, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě množiny M, přičemž v každém hraničním bodě, který je prvkem množiny M, je spojitá zleva resp. zprava.

Definice 5.3. (BODY NESPOJITOSTI)

Bod x_0 nazveme **bodem nespojitosti** funkce f,

jestliže je funkce f definovaná alespoň v prstencovém okolí tohoto bodu a není v něm spojitá.

Navíc můžeme rozlišit následující případy, kdy je bod x_0:

1. **bodem odstranitelné nespojitosti**: existují vlastní limity $f(x_0\pm)$ a platí

$$f(x_0+) = f(x_0-) \qquad \neq f(x_0)$$

2. **bodem nespojitosti I. druhu**: existují vlastní limity $f(x_0\pm)$ a platí

$$f(x_0+) \neq f(x_0-)$$

3. **bodem nespojitosti II. druhu**:

$$\textit{neexistuje vlastní } f(x_0+) \quad \text{nebo} \quad \textit{neexistuje vlastní } f(x_0-)$$

Věta 5.4. (algebra spojitých funkcí)

Pokud jsou funkce f a g spojité v bodě x_0, jsou spojité také funkce

$$f \pm g\,, \qquad f \cdot g\,, \qquad |f|$$

a pokud navíc $\forall x \in U(x_0)$ platí $g(x) \neq 0$, je spojitá také funkce $\dfrac{f}{g}$.

Věta 5.5. (spojitost složené funkce)

Pokud je funkce f spojitá v bodě x_0
a funkce g spojitá v bodě $t_0 = f(x_0)$,

potom je složená funkce $h(x) = g\big(f(x)\big)$ také spojitá v bodě x_0.

Věta 5.6. (CAUCHYOVA VĚTA)

Pokud f je spojitá funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí: $f(a) \cdot f(b) < 0$

potom existuje takové $\xi \in (a, b)$, že

$$f(\xi) = 0.$$

Důsledek 5.6. (řešitelnost rovnice jako důsledek)

Alespoň jedno řešení na intervalu $\langle a, b\rangle$ má rovnice

$$f(x) = p$$

pokud

$$\textit{funkce } f \textit{ je spojitá na } \langle a, b\rangle$$

a

$$f(a) \le p \le f(b) \quad \textit{nebo} \quad f(a) \ge p \ge f(b).$$

Věta 5.7. (WEIERSTRASSOVA VĚTA)

Funkce spojitá na uzavřeném intervalu zde nabývá svého globálního minima a maxima.

Definice 5.8. (Lipschitzova spojitost)

Řekneme, že funkce f je **lipschitzovsky spojitá** (lipschitzovská),

pokud je spojitá a existuje konstanta $L > 0$ taková, že pro každé x_1, $x_2 \in D(f)$ platí:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le L\,|x_2 - x_1|$$

5.100. NÁHLEDY ...

Věta 5.6. (lokální omezenost spojité funkce)

Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$, potom existuje okolí $U(x_0)$ bodu x_0, v němž je funkce f omezená.

Věta 5.7. (o zachování znaménka)

Nechť funkce f je spojitá v bodě $x_0 \in D(f)$ a nechť $f(x_0) \neq 0$. Potom existuje okolí bodu x_0 takové, že

$$\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0)$$

pro všechna x z tohoto okolí.

Definice 5.13. (stejnoměrná spojitost)

Funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ je **stejnoměrně spojitá na množině** $A \subset D(f)$, když

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in A, \forall x' \in A : \ |x' - x| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

Věta 5.14. ( )

Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na množině A, pak je na množině A spojitá.

Věta 5.15. (Cantorova věta)

Je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle \subset D(f)$, potom je stejnoměrně spojitá na tomto intervalu.