Kapitola 4. Limity

Karta 4.0.' (karta - limity)

▷ pro $x \to 0$ platí

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \sinh x \sim \operatorname{tgh} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \operatorname{argsinh} x \sim \operatorname{argtgh} x \sim \ln(1+x) \sim \mathrm{e}^x - 1$$

▷

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a, \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a, \quad a > 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 \le a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ +\infty, & a > 1, \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0 \le a < 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & a > 1, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1, \quad a > 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\mathrm{e}^{ax}} = 0, \quad a > 0, n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^n}{x^a} = 0, \quad a > 0, n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = 0.$$

Definice 4.1. (částečná limita)

Číslo $c \in \mathbb{R}^*$ je **částečná limita funkce** f pro $x \to x_0$, pokud existuje posloupnost (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$, taková, že

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = c.$$

Definice 4.2. (horní a dolní limita)

Supremum (infimum) množiny všech částečných limit funkce f v bodě x_0 nazveme **horní (dolní) limitou** funkce f:

$$\overline{\lim_{x\to x_0}}\ f(x) = \sup M \qquad \left(= \limsup_{x\to x_0} f(x) \quad \text{tzv. } \textbf{limes superior} \right)$$

$$\underline{\lim_{x\to x_0}}\ f(x) = \inf M \qquad \left(= \liminf_{x\to x_0} f(x) \quad \text{tzv. } \textbf{limes inferior} \right)$$

kde

$$M = \left\{ c \in \mathbb{R}^* : \ c \text{ je částečná limita funkce } f \text{ v bodě } x_0 \right\}.$$

Definice 4.3. (Heineho definice limity)

Mějme funkci $f : D(f) \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$, který je hromadným bodem definičního oboru $D(f)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **limitu** $b \in \mathbb{R}^*$, jestliže pro každou posloupnost (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$, která má limitu x_0, posloupnost funkčních hodnot $\big(f(x_n)\big)$ má limitu b.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = b \qquad \textit{resp.} \qquad f(x) \to b \quad \text{pro} \quad x \to x_0 \right)$$

Rozlišujeme: **limitu vlastní** ... $b \in \mathbb{R}$
limitu nevlastní ... $b = \pm\infty$

limitu ve vlastním bodě ... $x_0 \in \mathbb{R}$
limitu v nevlastním bodě ... $x_0 = \pm\infty$

Věta 4.4. (jednoznačnost limity)

Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.

Věta 4.5. (algebra limit)

Mějme dvě funkce, které mají v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ limitu: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \in \mathbb{R}^*, \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = c \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$

Potom má limitu i jejich součet, rozdíl, součin a podíl, přičemž platí:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = b \pm c \\ \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) &= \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = b \cdot c \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{b}{c} \end{aligned}\right. \quad \left(\begin{array}{c} \textit{pokud} \\ \textit{na pravé straně} \\ \textit{není} \\ \textit{neurčitý výraz} \end{array} \right.$$

Věta 4.6. (o nerovnosti limit)

Nechť funkce f, g, h mají společný definiční obor D.

i) Když $\forall x \in D : f(x) \leq g(x)$ a existují limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, potom platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

ii) Když $\forall x \in D : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ a existují limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ a jsou si rovny, potom existuje také $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Věta 4.7. (omezenost a limita)

Jestliže má funkce f v bodě x_0 konečnou limitu, potom existuje prstencové okolí $P(x_0)$, na kterém je f omezená.

Definice 4.8. (jednostranné limity)

i) Funkce f má v hromadném bodě x_0 definičního oboru $D(f)$ **limitu zprava** $b \in \mathbb{R}^*$, když pro každou posloupnost (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n > x_0$, $x_n \to x_0$, je $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$. Píšeme

$$b = \lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+).$$

ii) Funkce f má v hromadném bodě x_0 definičního oboru $D(f)$ **limitu zleva** $b \in \mathbb{R}^*$, když pro každou posloupnost (x_n), $x_n \in D(f)$, $x_n < x_0$, $x_n \to x_0$, je $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = b$. Píšeme

$$b = \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-).$$

Věta 4.9. (existence limity)

Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu $b \in \mathbb{R}^*$ právě tehdy, když má v bodě x_0 limitu zleva i limitu zprava a platí

$$f(x_0-) = f(x_0+) = b.$$

Věta 4.10. (limita složené funkce)

Mějme funkci $h(x) = g(f(x))$, $x \in D(f)$, kde $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $H(f) \subset \mathcal{H}$, a nechť existují

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = b.$$

Je-li splněna alespoň jedna z podmínek:

1. existuje prstencové okolí $P(x_0, \delta)$ bodu x_0 tak, že $f(x) \neq y_0$ pro všechna $x \in P(x_0, \delta) \cap D(f)$,
2. $b = g(y_0)$,

potom existuje $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = b$.

Definice 4.11. (funkce omezená ve srovnání)

Říkáme, že

1. **funkce f je v okolí bodu x_0 řádu $O(g)$**, jestliže funkce $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ je pro všechny body z nějakého prstencového okolí bodu x_0 omezená

$$\left(\textit{píšeme:} \quad f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0 \quad\right)$$

2. **funkce f a g jsou v bodě x_0 stejného řádu**, jestliže $f(x) = O(g(x))$ a $g(x) = O(f(x))$ pro $x \to x_0$.

3. **funkce f je v okolí bodu x_0 řádu $o(g)$**, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0 \quad\right)$$

4. **funkce f a g jsou si v bodě x_0 asymptoticky rovny**, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 1$.

$$\left(\textit{píšeme:} \quad f(x) \sim g(x), \quad x \to x_0 \quad\right)$$

4.100. NÁHLEDY ...

Definice 4.102. (Topologická definice limity)

Mějme funkci $f : D(f) \to \mathbb{R}$ a bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$, který je hromadným bodem definičního oboru $D(f)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **limitu** $b \in \mathbb{R}^*$, jestliže

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in D(f): \quad x \in P(x_0, \delta) \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U(b, \varepsilon).$$