Kapitola 3. Funkce

Karta 3.0. (karta - TABULKA základních funkcí)

1. lineární funkce:
$$y = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. kvadratická funkce:
$$y = ax^2 + bx + c, \qquad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

3. racionální lomená funkce:
$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ c \neq 0.$$

4. exponenciální funkce:
$$y = e^x, \qquad \Big(\textit{obecně: } y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1\Big).$$

5. logaritmická funkce:
$$y = \ln x, \qquad \Big(\textit{obecně: } y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1\Big).$$

6. funkce goniometrické
$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x.$$

7. funkce cyklometrické
$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \operatorname{arctg} x, \quad y = \operatorname{arccotg} x.$$

8. funkce hyperbolické
$$y = \sinh x, \quad y = \cosh x, \quad y = \operatorname{tgh} x, \quad y = \operatorname{cotgh} x.$$

9. funkce hyperbolometrické
$$y = \operatorname{argsinh} x, \quad y = \operatorname{argcosh} x, \quad y = \operatorname{argtgh} x, \quad y = \operatorname{argcotgh} x.$$

10. funkce celé části argumentu
$$y = [x] = \begin{cases} \lceil x \rceil = \min\{z \in Z, z \geq x\} & \text{pro } x < 0, \quad (\textit{horní celá část}) \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ \lfloor x \rfloor = \max\{z \in Z, z \leq x\} & \text{pro } x > 0, \quad (\textit{dolní celá část}) \end{cases}$$

11. funkce absolutní hodnoty
$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{pro} \quad x > 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \\ -x & \text{pro} \quad x < 0. \end{cases}$$

12. funkce signum
$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x > 0, \\ 0 & \text{pro} \quad x = 0, \\ -1 & \text{pro} \quad x < 0. \end{cases}$$

13. Dirichletova funkce
$$\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro} \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Definice 3.1. (funkce reálné proměnné)

Zobrazení f, které zobrazí množinu $D \subset \mathbb{R}$ na množinu $H \subset \mathbb{R}$ nazveme **funkcí jedné reálné proměnné**.

$$\left(\textit{zapisujeme:} \quad f : D \to \mathbb{R}, \quad \textit{nebo} \quad f : D \to H, \quad \textit{nebo} \quad y = f(x),\ x \in D \right)$$

Množinu $D = D(f)$ nazýváme **definičním oborem** a $x \in D(f)$ je **nezávislou proměnnou**.

Množinu $H = H(f)$ nazýváme **oborem hodnot** a $y \in H(f)$ je **funkční hodnotou**.

Definice 3.2. (restrikce funkce)

Funkci g nazveme **restrikcí (zúžením)** funkce f na množinu M, pokud

i) $M = D(g) \subset D(f)$,

ii) $\forall\, x \in D(g): \quad g(x) = f(x)$.

$\left(\textit{píšeme } g = f|_M \right)$

Definice 3.3. (rovnost funkcí)

Funkce f a g jsou si **rovny** jestliže

i) $D(f) = D(g)$,

ii) $\forall\, x \in D(f): \ f(x) = g(x)$.

$\left(\textit{píšeme } f = g \right)$

Definice 3.4. (algebraické operace s funkcemi)

Mějme funkce f a g se stejným definičním oborem D.

Funkce
$$\left\{ \begin{array}{rcll} (f+g)(x) & = & f(x)+g(x), & x \in D \\ (f-g)(x) & = & f(x)-g(x), & x \in D \\ (f \cdot g)(x) & = & f(x)\,g(x), & x \in D \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) & = & \frac{f(x)}{g(x)}, & x \in D \end{array} \right.$$
nazýváme
$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{součtem} \\ \textbf{rozdílem} \\ \textbf{součinem} \\ \textbf{podílem} \end{array} \right.$
funkcí f a g.

(v případě podílu předpokládáme $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in D$)

Definice 3.5. (vlastnosti funkcí)

Mějme funkci f, množinu $M \subset D(f)$ a *interval* $I \subset D(f)$. Funkce f se nazývá

1. **rostoucí** na M, platí-li $\forall x_1, x_2 \in M: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leq f(x_2)$
2. **klesající** na M, platí-li $\forall x_1, x_2 \in M: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \geq f(x_2)$

$\Big\}$ **monotónní**

3. **ostře rostoucí** na M, platí-li $\forall x_1, x_2 \in M: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2)$
4. **ostře klesající** na M, platí-li $\forall x_1, x_2 \in M: \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2)$

$\Big\}$ **ostře monotónní**

5. **konvexní** na I, platí-li $\forall x_1, x_2 \in I \ \forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle: \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
6. **konkávní** na I, platí-li $\forall x_1, x_2 \in I \ \forall \alpha \in \langle 0, 1\rangle: \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
7. **ostře konvexní** na I, platí-li $\forall x_1, x_2 \in I \ \forall \alpha \in (0, 1):$
$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
8. **ostře konkávní** na I, platí-li $\forall x_1, x_2 \in I \ \forall \alpha \in (0, 1):$
$x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
9. **sudá** na *symetrické* množině M, platí-li $\forall x \in M: \ f(-x) = f(x)$
10. **lichá** na *symetrické* množině M, platí-li $\forall x \in M: \ f(-x) = -f(x)$
11. **periodická** na M, když existuje $T > 0$ tak, že i) $\forall x \in M: \ x + T \in M \quad \wedge \quad x - T \in M$
ii) $\forall x \in M: \ f(x+T) = f(x)$
12. **omezená** na M, když existuje $K > 0$ tak, že $\forall x \in M: \ |f(x)| \leq K$
13. **zdola omezená** na M, když existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M: \ K \leq f(x)$
14. **shora omezená** na M, když existuje $K \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M: \ f(x) \leq K$
15. **prostá** na M, platí-li $\forall x_1, x_2 \in M: \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2)$

Věta 3.6. (monotónní $\Rightarrow$ prostá)

Je-li funkce f ostře monotónní, potom je prostá.

Definice 3.7. (rovnice o jedné neznámé)

Mějme funkci f a reálné číslo b.

Úloha najít $x_0 \in D(f)$ takové, že $f(x_0) = b$, se nazývá **rovnice o jedné neznámé** a zapisuje se

$$f(x) = b.$$

Číslo x_0 je **řešení**, nebo také **kořen** rovnice.

Věta 3.8. (řešitelnost rovnic)

Mějme rovnici $f(x) = b$.

i) Pokud je $b \in H(f)$, má rovnice **alespoň jedno řešení**.

ii) Pokud je funkce f prostá na $D(f)$, má rovnice **nejvýše jedno řešení**.

iii) Pokud je splněno i) a ii), má rovnice **právě jedno řešení**.

Definice 3.9. (inverzní funkce)

Mějme prostou funkci $f : D(f) \to H(f)$.

Funkci, která každému $y \in H(f)$ přiřazuje to jediné $x \in D(f)$, pro které je $f(x) = y$,
nazýváme **inverzní funkcí** k funkci f a značíme

$$f^{-1} : H(f) \to D(f).$$

$$\left(\textit{píšeme} \quad y = f(x) \;\; a \;\; x = f^{-1}(y) \right)$$

Věta 3.10. (existence inverzní funkce)

Je-li funkce $f : D(f) \to H(f)$ ostře monotónní, potom existuje inverzní funkce $f^{-1} : H(f) \to D(f)$.

Definice 3.11. (složená funkce)

Mějme funkce $f(x)$ a $g(x)$ takové, že:
$$\begin{array}{lccc} f: & D(f) & \to & H(f), \\ g: & D(g) & \to & H(g), \end{array} \qquad \text{kde} \quad H(g) \subset D(f).$$

Funkce $h(x)$ definovaná předpisem

$$h(x) = f(\,g(x)\,)$$

je **složená funkce** funkcí f a g a platí:

$$h : D(g) \to H(f).$$

Definice 3.12. (lokální extrémy)

Funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum** (resp. **lokální maximum**),
když existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$ takové, že pro všechna $x \in U(x_0)$ je

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad (\text{ resp.} \quad f(x_0) \geq f(x)\ )$$

Funkce f má v bodě x_0 **ostré lokální minimum** (resp. **ostré lokální maximum**),
když pro všechna $x \neq x_0$ z $U(x_0)$ je

$$f(x_0) < f(x) \qquad (\text{ resp.} \quad f(x_0) > f(x)\ )$$

Lokální minima a maxima se souhrnně nazývají **lokální extrémy**.

Definice 3.13. (globální extrémy)

Funkce f má v bodě x_0 **globální minimum** (resp. **globální maximum**),
když pro všechna $x \in D(f)$ je

$$f(x_0) \leq f(x) \qquad (\text{ resp. } \quad f(x_0) \geq f(x) \text{)}$$

Funkce f má v bodě x_0 **ostré globální minimum** (resp. **ostré globální maximum**),
když pro všechna $x \neq x_0$ z $D(f)$ je

$$f(x_0) < f(x) \qquad (\text{ resp. } \quad f(x_0) > f(x) \text{)}$$

Globální minima a maxima se souhrnně nazývají **globální extrémy**.

3.100. NÁHLEDY …