Kapitola 1. Posloupnosti

Karta 1.0..' (karta - neurčité výrazy)

Uspořádání na rozšířené množině reálných čísel $\mathbb{R}^* = \langle -\infty, +\infty \rangle$ *a absolutní hodnota:*

$$-\infty < +\infty \qquad -\infty < c < +\infty \quad \textit{pro každé } c \in \mathbb{R}$$

$$|-\infty| = |+\infty| = +\infty$$

Stručně o aritmetice $\mathbb{R}^*$*:*

$$\begin{aligned} -(\pm\infty) &= \mp\infty \\ c + (\pm\infty) &= \pm\infty \qquad \textit{pro } c \neq \mp\infty \\ c \cdot (\pm\infty) &= \begin{cases} \pm\infty & \textit{pro } c > 0 \\ \mp\infty & \textit{pro } c < 0 \end{cases} \\ \frac{c}{\pm\infty} &= 0 \qquad \textit{pro } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (+\infty)^c &= \begin{cases} 0 & \textit{pro } c < 0 \\ +\infty & \textit{pro } c > 0 \end{cases} \\ c^{+\infty} &= \begin{cases} 0 & \textit{pro } 0 < c < 1 \\ +\infty & \textit{pro } c > 1 \end{cases} \\ c^{-\infty} &= \begin{cases} +\infty & \textit{pro } 0 < c < 1 \\ 0 & \textit{pro } c > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

odkud je však na první (druhý, třetí, ...) pohled zřejmé, že existuje **7** *problematických operací:*

$$\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \qquad \text{„}\frac{cokoli}{0}\text{"} \qquad \text{"}0 \cdot \infty\text{"} \qquad \text{"}\infty - \infty\text{"} \qquad \text{"}1^{\infty}\text{"} \qquad \text{"}0^0\text{"} \qquad \text{"}\infty^0\text{"}$$

Souhrně je navýzáme **neurčité výrazy** *a snadno se s nimi můžeme setkat při výpočtu limit:*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} && \textit{limita typu } \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"} \textit{ resp. } \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \\ &\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n && \textit{limita typu } \text{"}0 \cdot \infty\text{"} \\ &\lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) && \textit{limita typu } \text{"}\infty - \infty\text{"} \\ &\lim_{n\to+\infty} a_n^{b_n} && \textit{limita typu } \text{"}1^{\infty}\text{"} \textit{ resp. } \text{"}0^0\text{"} \textit{ resp. } \text{"}\infty^0\text{"} \end{aligned}$$

Okolí nevlastních čísel $\pm\infty$*:*

okolí plus nekonečna
$U(+\infty) = (1/\delta, +\infty\rangle$

okolí mínus nekonečna
$U(-\infty) = \langle -\infty, -1/\delta)$

prstencové okolí plus nekonečna
$P(+\infty) = (1/\delta, +\infty)$

prstencové okolí mínus nekonečna
$P(-\infty) = (-\infty, -1/\delta)$

Karta 1.0.'.' (karta - limity)

$$\sqrt{n} \ll \ln n \ll n \ll n^2 \ll n^3 \ll \cdots \ll n^k \ll \mathrm{e}^n \ll n! \ll n^n$$

▷ $$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{pro } q = 1 \\ +\infty & \text{pro } 1 < q \\ \nexists & \text{pro } q \le -1 \end{cases}$$

▷ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = \begin{cases} 0 & \text{pro } |a| > 1 \\ +\infty & \text{pro } 0 < a \le 1 \\ \nexists & \text{pro } -1 \le a < 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

▷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0$ pro $a > 0,\ a \neq 1,\ k \in \mathbb{N}$

▷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n!} = 0$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ pro $a \in \mathbb{R}$

▷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

$$\underbrace{\log_a n \ll n^k}_{a>0,\ a\neq 1} \overbrace{\ll}^{|a|>1} \underbrace{a^n \ll n!}_{a\in\mathbb{R}} \ll n^n \qquad k \in \mathbb{N}$$

▷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a > 0$

▷ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$

Definice 1.1. (POSLOUPNOST)

Posloupnost reálných čísel je zobrazení,
jehož definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ a oborem hodnot množina $H \subset \mathbb{R}$.

píšeme: $\quad (a_n)\,,\quad (a_n)_{n=1}^{+\infty}\,,\quad (a_1, a_2, a_3, \dots)\,,\quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Číslu n říkáme index prvku a číslu a_n n-tý člen posloupnosti.

Definice 1.2. (algebra posloupností)

Posloupnosti $\left\{\begin{array}{c}(a_n+b_n)\\(a_n-b_n)\\(a_n\cdot b_n)\\\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\end{array}\right.$ nazýváme $\left\{\begin{array}{l}\textbf{součtem}\\\textbf{rozdílem}\\\textbf{součinem}\\\textbf{podílem}\end{array}\right.$ posloupností (a_n) a (b_n).

(v případě podílu předpokládáme $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$ *)*

Definice 1.3. (omezená)

Řekneme, že posloupnost (a_n) je

i) **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $m \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq m$,

ii) **omezená shora**, jestliže existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq M$.

Konečně (a_n) je **omezená posloupnost**, pokud je omezená zdola i shora.

$$\left(\ \textit{pro omezené posloupnosti se často používá zápis } \exists K > 0\ \forall n \in \mathbb{N}:\ |a_n| \leq K\ \right)$$

Definice 1.4. (monotónní)

Posloupnost (a_n) se nazývá:

$$\left.\begin{array}{lll}\textbf{klesající}, & \text{platí-li} & \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \geq a_{n+1},\\ \textbf{rostoucí}, & \text{platí-li} & \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n \leq a_{n+1},\end{array}\right\}\ \textbf{monotónní},$$

$$\left.\begin{array}{lll}\textbf{ostře klesající}, & \text{platí-li} & \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n > a_{n+1},\\ \textbf{ostře rostoucí}, & \text{platí-li} & \forall n \in \mathbb{N}:\ a_n < a_{n+1},\end{array}\right\}\ \textbf{ostře monotónní}.$$

Definice 1.5. (min, max, inf, sup)

$\left.\begin{array}{l}\textbf{Minimem}\\\textbf{Maximem}\\\textbf{Infimem}\\\textbf{Supremem}\end{array}\right\}$ posloupnosti (a_n), rozumíme $\left.\begin{array}{l}\textbf{minimum}\\\textbf{maximum}\\\textbf{infimum}\\\textbf{supremum}\end{array}\right\}$ množiny $\{a_n\}$.

$$\left(\ \textit{korektně množina } \{a_n\} = \{a \in \mathbb{R}, \exists\, n \in \mathbb{N} : a = a_n\} \textit{ je oborem hodnot posloupnosti}\ \right)$$

Definice 1.6. (LIMITA)

Řekneme, že posloupnost (a_n) má **limitu**, jestliže

$$\text{existuje } a \in \mathbb{R}^* \text{ takové, že } \quad \forall \varepsilon > 0\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}: \; n > n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\left(\textit{píšeme:} \qquad \lim_{n \to +\infty} a_n = a \qquad \lim a_n = a \qquad a_n \to a \right)$$

Rozlišujeme: **limitu vlastní** ... $a \in \mathbb{R}$
limitu nevlastní ... $a = \pm\infty$

Posloupnost (a_n) nazveme: **konvergentní** pokud má vlastní limitu,
divergentní pokud má limitu nevlastní a nebo limita neexistuje.

Věta 1.7. (algebra limit)

Mějme dvě posloupnosti, které mají limitu: $\begin{cases} a_n \to a, \\ b_n \to b. \end{cases}$

Potom má limitu i jejich součet, rozdíl, součin a podíl, přičemž platí:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n \to +\infty} a_n \pm \lim_{n \to +\infty} b_n = a \pm b \\ \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot b_n &= \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot \lim_{n \to +\infty} b_n = a \cdot b \\ \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\lim_{n \to +\infty} a_n}{\lim_{n \to +\infty} b_n} = \frac{a}{b} \end{aligned} \qquad \left(\begin{array}{c} \textit{pokud} \\ \textit{na pravé straně} \\ \textit{není} \\ \textit{neurčitý výraz} \end{array} \right.$$

(v případě podílu předpokládáme $b \neq 0$)

Věta 1.8. (věty o limitách)

i) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

ii) Každá konvergentní posloupnost je omezená

$$\textit{konvergentní} \quad \Rightarrow \quad \textit{omezená}$$

iii) Každá omezená a monotónní posloupnost je konvergentní.

$$\underset{\substack{\lim a_n = \inf\{a_n\} \\ \lim a_n = \sup\{a_n\}}}{\textit{konvergentní}} \quad \Leftarrow \quad \textit{omezená} + \underset{\substack{\textit{klesající} \\ \textit{rostoucí}}}{\textit{monotónní}}$$

$$\left(\textit{omezená} \not\Rightarrow \textit{konvergentní} \qquad \textit{monotónní} \not\Rightarrow \textit{konvergentní} \qquad \textit{konvergentní} \not\Rightarrow \textit{monotónní} \right)$$

Definice 1.8". (důsledek: EULEROVO ČÍSLO)

Eulerovo číslo definujeme vztahem $\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \doteq$

Věta 1.9. (věty o nerovnostech)

Mějme dvě posloupnosti, které mají limitu $\begin{cases} a_n \to a, \\ b_n \to b. \end{cases}$

Pokud

i) pro skoro všechna n je $a_n \geq b_n$, potom

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \geq \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

ii) je $\lim_{n\to+\infty} a_n > \lim_{n\to+\infty} b_n$, potom

$$a_n > b_n \quad \text{pro skoro všechna } n.$$

Věta 1.9". (důsledek: O DVOU POLICAJTECH)

Mějme tři posloupnosti (a_n), (b_n), (c_n) a předpokládejme, že:

i) pro skoro všechna n platí .... $a_n \leq b_n \leq c_n$

ii) posloupnosti (a_n), (c_n) mají stejnou limitu .... $\searrow \downarrow \swarrow$ a

Potom má posloupnost (b_n) také limitu a platí: $\lim_{n\to+\infty} b_n = a$

1.100. NÁHLEDY ...

Definice 1.101. (cauchyovská posloupnost)

Reálná posloupnost (a_n) se nazývá **cauchyovská v $\mathbb{R}$** (**fundamentální v $\mathbb{R}$**), jestliže:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N} : n > n_0 \ \wedge\ m > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Věta 1.102. (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium)

Reálná posloupnost (a_n) je konvergentní v $\mathbb{R}$ právě tehdy, když je cauchyovská v $\mathbb{R}$.