2 ♡

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1,3,2,1) & \mathbf{v}_2 &= (2,2,4,-1) \\ \mathbf{v}_3 &= (1,-1,2,-2) & \mathbf{v}_4 &= (1,2,3,-1) \\ \mathbf{v}_5 &= (0,3,1,1) \end{aligned}$$

generují prostor R^4.

2. Cramerovým pravidlem řešte soustavu

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 2 \\ 2x - y - 2z &= -1 \\ 3x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

3. Najděte Jordanův tvar matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Najděte bázi jádra a obrazu následujícího lineárního zobrazení.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \quad & (x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4, \\ & -5x_2 + 5x_3 - 4x_4, 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4) \end{aligned}$$

5. Kvadratické formy a reálné symetrické matice

6. Definujte

Polynom
Báze vektorového prostoru
Inverzní permutace
Jádro lineárního zobrazení
Nehomogenní soustava rovnic
Eukleidovský prostor
Ortogonální doplněk podprostoru

Popište základní vlastnosti operací s vektory.

3 ♡

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$$

2. Najděte matici inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 \\ -2 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = a + \frac{b}{x}$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	2	3	4	5	6	7	8
y	60	40	30	24	20	17	16

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 5x_2x_3$$

5. Definice determinantu matice a jeho základní vlastnosti

6. Definujte

Kořen polynomu
Vedlejší diagonála matice
Detreminant matice
Izomorfní vektorové prostoru
Jednoznačně řešitelná soustava rovnic
Jordanova buňka
Kongruentní matice

Popište způsob hledání hodnosti matice.

4 ♡

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

2. Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\begin{array}{rr} \mathbf{u} = (1,3,2,1) & \mathbf{v} = (2,2,4,-1) \\ \mathbf{w} = (3,1,1,2) & \end{array}$$

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\begin{array}{llllll} \mathcal{F}: & \mathbf{u}_1 = (1,1,1,1) & \mathbf{u}_2 = (1,1,1,0) & \mathcal{G}: & \mathbf{v}_1 = (1,2,1,1) & \mathbf{v}_2 = (1,2,1,1) \\ & \mathbf{u}_3 = (1,1,0,0) & \mathbf{u}_4 = (1,0,0,0) & & \mathbf{v}_3 = (1,1,2,1) & \mathbf{v}_4 = (1,1,1,2) \end{array}$$

5. Ortogonální průmět vektoru do podprostoru metoda nejmenších ctverců.
6. Definujte

Vektorový prostor
Řádkový index
Inverzní matice
Matice lineárního zobrazení
Matice soustavy rovnic
Norma vektoru
Gramova matice

Popište způsob řešení nehomogenní soustavy rovnic.

5 ♡

1. Rozložte polynom

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 12$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. Najděte bázi ortogonálního doplňku prostoru generovaného vektory $\mathbf{u} = (1, 2, 1, 2)$ a $\mathbf{v} = (3, 2, 1, 3)$.

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2x_3$$

5. Konstrukce inverzní matice pomocí determinantů.

6. Definujte

Stupeň polynomu
Matice typu mxn
Rovnost matic
Hodnost matice
Vektor pravých stran
Vzdálenost vektorů
Bilineární forma

Popište hledání ortogonálního průmětu.

6 $\heartsuit$

1. Rozhodněte, zda jsou vektory
$v_1 = (1, 2, -1, -1)$, $v_2 = (2, 1, -1, 1)$, $v_3 = (-2, -1, 1, -1)$, $v_4 = (-1, 1, 0, -2)$
lineárně nezávislé.

2. Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\mathbf{u} = (1, 3, 2, 1) \quad \mathbf{v} = (2, 2, 4, -1)$$
$$\mathbf{w} = (-3, 2, 1, 2)$$

4. Rozhodněte, zda jsou kongruentní matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Inverzní matice. Jordanova eliminační metoda.

6. Definujte
Kořen polynomu
hlavní diagonála matice
Součet matic
Adjungovaná matice
Nehomogenní soustava rovnic
Norma vektoru
Symetrická bilineární forma

Jaký je stupeň součtu a součinu polynomů?

7 $\heartsuit$

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\begin{array}{rr} \mathbf{v}_1 = (2,1,2,1) & \mathbf{v}_2 = (1,2,1,2) \\ \mathbf{v}_3 = (-2,-2,0,-2) & \mathbf{v}_4 = (-1,-1,-1,-1) \end{array}$$

tvoří bázi prostoru R^4.

2. Cramerovým pravidlem řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 2 \\ -2x + y + z &= -1 \\ 2x + y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

3. Najděte řetězce zobecněných vlastních vektorů matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

příslušné vlastnímu číslu 0.

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F}: & \mathbf{u}_1 = (1,1,1,0) & \mathbf{u}_2 = (1,1,0,1) \\ & \mathbf{u}_3 = (1,0,1,1) & \mathbf{u}_4 = (0,1,1,1) \end{array} \quad \begin{array}{lll} \mathcal{G}: & \mathbf{v}_1 = (1,2,1,1) & \mathbf{v}_2 = (1,2,1,1) \\ & \mathbf{v}_3 = (1,1,2,1) & \mathbf{v}_4 = (1,1,1,2) \end{array}$$

5. Ortogonální a ortonormální báze prostoru. Gram–Schmidtův ortogonalizační proces.

6. Definujte

Násobnost kořene polynomu
Nulová matice
Opačná matice
Stupňovitý tvar matice
Neřešitelná soustava rovnic
Jordanův tvar matice
Inercie kvadratické formy

Popište základní vlastnosti součtu a součinu matic.

8 ♡

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v daných básních $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$.
$\mathcal{L} : \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_4$
$\mathcal{L}(a, b, c) = (a + b + 2c, a - b - c, 2a + b, a - 3b + c)$
$\mathcal{F} : v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, 0, 0)$
$\mathcal{G} : w_1 = (2, 1, 1, 1), w_2 = (1, 2, 1, 1), w_3 = (1, 1, 2, 1), w_4 = (1, 1, 1, 2)$

5. Izomorfismus vektorových prostorů.

6. Definujte
Součet vektorů
Jednotková matice
Komutující matice
Singulární matice
Homogenní soustava příslušná soustavě rovnic
Norma indukovaná skalárním součinem
Indefinitní kvadratické forma

Popište vlatnosti matice přechodu.

9 ♡

1. Rozložte polynom

$$x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10$$

víte-li, že jedním z kořenů je $1 + i$.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = ax^2 + bx + c$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	1	2	3	4	5	6	7
y	6	5	4	5	6	8	14

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 6x_2x_3$$

5. Změna matice lineárního operátoru při změně báze.

6. Definujte

Opačný vektor
Dolní trojúhelníková matice
Permutace
Matice přechodu
Vlastní číslo matice
Eukleidovský prostor
Ortonormální báze

Popište Gram–Schmidtův ortogonalizační proces.

10 ♡

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+9 \end{vmatrix}$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= -4 \end{aligned}$$

3. Najděte ortogonální průmět vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 1)$ do prostoru generovaného vektory $\mathbf{v} = (1, -1, 3, 2)$ a $\mathbf{w} = (-2, 2, -1, 3)$.

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\begin{array}{lllllll} \mathcal{F}: & \mathbf{u}_1 = (1,2,1,0) & \mathbf{u}_2 = (2,1,0,1) & \mathcal{G}: & \mathbf{v}_1 = (2,2,1,1) & \mathbf{v}_2 = (1,2,1,1) \\ & \mathbf{u}_3 = (1,0,1,2) & \mathbf{u}_4 = (0,1,2,1) & & \mathbf{v}_3 = (0,0,2,1) & \mathbf{v}_4 = (1,0,0,2) \end{array}$$

5. Polynomy, rozklad na kořenové činitele, Hornerovo schéma.

6. Definujte

Komutativní grupa
Množina gengerátorů vektorového prostoru
Identická permutace
Lineární zobrazení
Spektrum matice
Podobná matice
Ortogonální doplněk podprostoru

Jaký je vztah mezi množinou generátorů a bází?

J $\heartsuit$

1. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Určete A^4.

2. Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. Najděte Jordanův tvar matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

5. Matice lineárního zobrazení a její vlastnosti.

6. Definujte

Lineární kombinace vektorů
Dimenze vektorového prostoru
Skládání permutací
Obraz lineárního zobrazení
Matice soustavy rovnic
Ortogonální báze
Kongruentní matice

Vyslovte základní větu algebry.

Q $\heartsuit$

1. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete $\mathbf{A}^{12}$, $\mathbf{A}^n$.

2. Najděte matici adjungovanou k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Najděte jednotkový vektor kolmý k vektorům

$$\mathbf{u} = (-1, 2, 1, 1) \quad \mathbf{v} = (2, 1, 0, 1)$$
$$\mathbf{w} = (3, 1, 1, 2)$$

4. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v daných básních $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$.

$\mathcal{L} : \mathbf{R}_4 \to \mathbf{R}_3$
$\mathcal{L}(a, b, c, d) = (a + b + 2c, a - b - d, 2a + b + c - 2d)$
$\mathcal{F} : v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 1, 1, 0), v_3 = (1, 1, 0, 0), v_4 = (1, 0, 0, 0)$
$\mathcal{G} : w_1 = (2, 1, 1), w_2 = (1, 2, 1), w_3 = (1, 1, 2)$

5. Báze a dimenze vektorového prostoru, souřadnice vektoru v dané bázi.

6. Definujte

Triviální lineární kombinace vektorů
Matice typu mxn
Sudá permutace
Matice přechodu
Vektor pravých stran
Jordanův tvar matice
Inercie matice

Vyslovte Frobeniovu větu.

K ♡

1. Řešte maticovou rovnici

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 &= 12 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_4 &= 14 \\ 2x_1 - x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ -2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

3. Najděte Jordanův tvar matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F}: & \mathbf{u}_1 = (-1,1,1,1) & \mathbf{u}_2 = (1,-1,1,1) \\ & \mathbf{u}_3 = (1,1,-1,1) & \mathbf{u}_4 = (1,1,1,-1) \end{array} \quad \begin{array}{lll} \mathcal{G}: & \mathbf{v}_1 = (1,2,3,4) & \mathbf{v}_2 = (0,1,2,3) \\ & \mathbf{v}_3 = (0,0,1,2) & \mathbf{v}_4 = (0,0,0,2) \end{array}$$

5. Rozvoj determinantu podle řádku či sloupce.
6. Definujte

Lineárně nezávislé vektory
Čtvercová matice
Lichá permutace
Inverzní matice
Nehomogenní soustava rovnic
Jordanův tvar matice
Negativně semidefinitní kvadratická forma

Vyslovte Pythagorovu větu pro eukleidovké prostory.

A $\heartsuit$

1. Rozhodněte, zda jsou vektory
$v_1 = (1, 2, -3, -2)$, $v_2 = (1, 1, -3, 1)$, $v_3 = (-2, -1, 3, -1)$, $v_4 = (-1, -2, 0, -2)$ lineárně nezávislé.

2. Najděte matici adjungovanou k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1) \quad \mathbf{v} = (2, 2, 1, -2)$$
$$\mathbf{w} = (3, 1, 1, 2)$$

4. Je dána bilineární forma $\psi(x, y)$ na prostoru $\mathbf{R}_3$. Určete matici $\mathcal{A}$ formy ve standardní bázi $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1$ a matici $\mathbf{B}$ formy v dané bázi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Najděte matici přechodu $\mathbf{T}$ mezi danými bázemi a ověřte, že $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T}$.

$$\begin{aligned} \psi(x, y) \quad &= x_1y_1 \quad +2x_1y_2 \quad -x_1y_3 \\ &+x_2y_1 \quad +3x_2y_2 \quad +2x_2y_3 \\ &-3x_3y_1 \quad +x_3y_2 \quad -x_3y_3 \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1) \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0) \quad \mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$

5. Homogenní soustavy rovnic.

6. Definujte

Lineární obal vektroů
Vektorový prostor
Symetrická matice
Epimorfismus
Ekvivalentní soustavy rovnic
Vzdálenost vektorů
Ortogonální průmět vektoru do podprostoru

Vyslovte základní větu algebry.

2 $\diamondsuit$

1. Rozložte polynom

$$x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x - 3$$

2. Cramerovým pravidlem řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 4 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

5. Ortogonální průmět vektoru do podprostoru, metoda nejmenších čtverců.

6. Definujte

Množina generátorů vektorového prostoru
Lineární kombinace vektorů
Transponovaná matice
Minor matice
Charakteristický polynom matice
Podobné matice
Bilineární forma

Popište Laplaceův rozvoj determinantu.

3 $\diamondsuit$

1. Pomocí Laplaceova rozvoje vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

3. Najděte ortogonální průmět vektoru $\mathbf{u} = (1, -2, 1, 3)$ do prostoru generovaného vektory $\mathbf{v} = (1, -1, 3, 2)$ a $\mathbf{w} = (-2, 2, -1, 3)$.

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\begin{array}{lllllll} \mathcal{F}: & \mathbf{u}_1 = (2,1,1,1) & \mathbf{u}_2 = (1,2,1,1) & \mathcal{G}: & \mathbf{v}_1 = (1,2,3,4) & \mathbf{v}_2 = (0,1,2,3) \\ & \mathbf{u}_3 = (1,1,2,1) & \mathbf{u}_4 = (1,1,1,2) & & \mathbf{v}_3 = (0,0,1,2) & \mathbf{v}_4 = (0,0,0,2) \end{array}$$

5. Inercie kvadratické formy, zákon setrvačnosti kvadratické formy.

6. Definujte

Báze vektorového prostoru
Polynom
λ-násobek matice
Matice lineárního zobrazení
Vlatní vektor matice
Unitární prostor
Kvadratická forma

Popište postup řešení homogenní soustavy rovnic.

4 $\diamondsuit$

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - 8x_2 - 3x_4 &= -1 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 10x_4 &= -2 \\ 7x_1 - x_2 + x_3 - 9x_4 &= -4 \\ 2x_1 - 2x_3 - 4x_4 &= -6 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 &= -1 \end{aligned}$$

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	10	14	13	19	20	28

4. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v daných básních $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$.
$\mathcal{L} : \mathbf{R}_3 \to \mathcal{P}_2$
$\mathcal{L}(a,b,c) = (a+b+2c)x^2 + (2a-b)x + 3a + b - c$
$\mathcal{F} : w_1 = (1,1,1), w_2 = (1,1,0), w_3 = (1,0,0)$
$\mathcal{G} : p_1 = x^2 + 2x, p_2 = x^2 + 1, p_3 = x + 2$

5. Vlastní čísla a vlastní vektory matice.

6. Definujte
Dimenze vektorového prostoru
Grupa
Komutující matice
Singulární matice
Soustava m rovnic o n neznámých
Ortogonální vektory
Pozitivně semidefinitní kvadratická forma

Popište metodu nejmenších čtverců.

5 $\diamondsuit$

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1,3,2,1) & \mathbf{v}_2 &= (2,2,4,-1) \\ \mathbf{v}_3 &= (1,-1,2,-2) & \mathbf{v}_4 &= (1,2,3,-1) \\ \mathbf{v}_5 &= (0,3,1,2) \end{aligned}$$

generují prostor R^4.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 6 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 6x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 - x_4 &= -2 \end{aligned}$$

3. Najděte bázi ortogonálního doplňku prostoru generovaného vektory $\mathbf{u} = (1,-2,1,2)$ a $\mathbf{v} = (3,2,1,-3)$.

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = -6x_1^2 - 5x_2^2 - 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$$

5. Definitnost kvadratické formy, Sylvestrovo kritérium.

6. Definujte

Polynom
Diagonální matice
Permutace
Determinant matice
Vektor pravých stran
Skalární součin vektorů
Hlavní minor matice

Popište maximální možný rozklad polynomu na součin polynlmů v oboru reálných čísel.

6 $\diamondsuit$

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\begin{array}{rr} \mathbf{v}_1 = (-2, 1, 2, 1) & \mathbf{v}_2 = (1, -2, 1, 2) \\ \mathbf{v}_3 = (-1, -2, 0, -2) & \mathbf{v}_4 = (-1, 0, -1, -1) \end{array}$$

tvoří bázi prostoru R^4.

2. Najděte matici inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Najděte ortogonální průmět vektoru $\mathbf{u} = (2, -2, -1, 3)$ do prostoru generovaného vektory $\mathbf{v} = (1, 0, 3, -2)$ a $\mathbf{w} = (-2, 1, -1, 2)$.

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\begin{array}{lrr lrr} \mathcal{F}: & \mathbf{u}_1 = (2, 2, 1, -1) & \mathbf{u}_2 = (1, 2, -3, 1) & \mathcal{G}: & \mathbf{v}_1 = (1, 2, 3, 4) & \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2, 3) \\ & \mathbf{u}_3 = (3, 1, 2, 0) & \mathbf{u}_4 = (1, -2, 1, 2) & & \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 2) & \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1) \end{array}$$

5. Polynomy, Hornerovo schéma, rozklad na kořenové činitele.

6. Definujte

Vedoucí koeficient polynomu
Horní trojúhelníková matice
Transpozice
Obraz lineárního zobrazení
Řešení soustavy rovnic
Ortogonální vektory
Ortogonální doplněk podprostoru

Popište Jordanovu eliminační metodu hledání inverzní matice.

7 $\diamondsuit$

1. Rozložte polynom

$$x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 28x - 24$$

2. Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Najděte Jordanův tvar matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Je dána bilineární forma $\psi(x, y)$ na prostoru $\mathbf{R}_3$. Určete matici $\mathcal{A}$ formy ve standardní bázi $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1$ a matici $\mathbf{B}$ formy v dané bázi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Najděte matici přechodu $\mathbf{T}$ mezi danými bázemi a ověřte, že $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T}$.

$$\begin{array}{rrrr} \psi(x,y) & = x_1y_1 & +2x_1y_2 & -x_1y_3 \\ & +x_2y_1 & +3x_2y_2 & +2x_2y_3 \\ & -3x_3y_1 & +x_3y_2 & -x_3y_3 \end{array}$$

$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)$ $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$

5. Lineární zobrazení, jádro a obraz a jejich dimenze.

6. Definujte

Dělitelnost polynomů
lineární obal vektorů
Inverze v permutaci
Regulární matice
Homogenní soustava příslušná soustavě rovnic
Eukleidovský prostor
Symetrická bilineární forma

Popište Gram–Schmidtův ortogonalizační proces.

8 $\diamondsuit$

1. Rozhodněte, zda jsou vektory
$v_1 = (3, 2, -3, -2)$, $v_2 = (2, 2, -3, 1)$, $v_3 = (2, -3, 3, 2)$, $v_4 = (-1, 3, -3, -5)$
lineárně nezávislé.

2. Řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 &= 1 \\
x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 &= 1 \\
x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1
\end{aligned}
$$

v závisloti na hodnotě parametru a.

3. Najděte Jordanův tvar matice

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}
$$

4. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v daných básních $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$.
$\mathcal{L} : \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_4$
$\mathcal{L}(a, b, c) = (a + b + 2c, a - b - c, 2a + b, a - 3b + c)$
$\mathcal{F} : v_1 = (2, 1, 1), v_2 = (1, 2, 1), v_3 = (1, 1, 2)$
$\mathcal{G} : w_1 = (1, 1, 1, 1), w_2 = (1, 1, 1, 0), w_3 = (1, 1, 0, 0), w_4 = (1, 0, 0, 0)$

5. Inercie kvadratické formy, zákon setrvačnosti kvadratických forem.

6. Definujte
Vektrový prostor
Dimenze vektorového prostoru
Lichá permutace
Hodnost matice
Vlastní číslo matice
Jordanův tvar matice
Pozitivně semidefinitní bilineární forma

Popište rozklad polynomu v oboru komplexních čísel.

9 $\diamondsuit$

1. Pomocí Laplaceova rozvoje vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 2_1 + 4x_2 - 2x_3 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \quad & \mathbf{u}_1 = (2,2,1,-1) \quad \mathbf{u}_2 = (1,2,-3,1) & \mathcal{G}: \quad & \mathbf{v}_1 = (4,3,2,1) \quad \mathbf{v}_2 = (4,3,2,0) \\ & \mathbf{u}_3 = (3,1,2,0) \quad \mathbf{u}_4 = (1,-2,1,2) & & \mathbf{v}_3 = (4,3,0,0) \quad \mathbf{v}_4 = (4,0,0,0) \end{aligned}$$

5. Soustavy s regulární maticí, Cramerovo pravidlo.
6. Definujte

Grupa
Sloupcový index
Symetrická matice
Izomorfní vektorové prostory
Soustava m rovnic o n neznámých
Norma indukovaná skalárním součinem
Ortonormální báze

Popište způsob hledání hodnosti matice.

10 $\diamondsuit$

1. Řešte maticovou rovnici

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Cramerovým pravidlem řešte soustavu

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 3 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 3y - 2z &= -1 \end{aligned}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1) \quad \mathbf{v} = (2, 2, 2, -2)$$
$$\mathbf{w} = (2, 0, 1, -1)$$

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 9x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$$

5. Rozvoj determinantu podle řádku či sloupce.

6. Definujte

Podprostor vektorového prostoru
Vedlejší diagonála matice
Součet matic
Adjungovaná matice
Vektor neznámých
Skalární součin vektorů
Bilineární forma

Vyslovte Cauchy–Schwarzovu nerovnost.

J $\diamondsuit$

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= 2 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 22x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= 0 \end{aligned}$$

3. Najděte ortogonální průmět vektoru $\mathbf{u} = (1, -2, -1, 3)$ do prostoru generovaného vektory $\mathbf{v} = (1, 1, 3, -2)$ a $\mathbf{w} = (-2, 1, -2, 2)$.

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 12x_2x_3$$

5. Hodnost matice, Gaussova eliminační metoda.

6. Definujte

Netriviální lineární kombinace vektorů
Jednotková matice
Součin matic
Inverzní matice
Řešení soustavy rovnic
Podobné matice
Inercie matice

Jak lze maximálně rozložit polynom v oboru reálných čísel?

Q $\diamondsuit$

1. Rozložte polynom

$$x^4 + x^2 + 1$$

2. Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\mathbf{u} = (2, 1, 2, -1) \quad \mathbf{v} = (-1, 4, 5, 2)$$
$$\mathbf{w} = (3, 1, 1, 2)$$

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\mathcal{F}: \quad \begin{matrix} \mathbf{u}_1 = (2, 2, 1, -1) & \mathbf{u}_2 = (1, 2, -3, 1) \\ \mathbf{u}_3 = (3, 1, 2, 0) & \mathbf{u}_4 = (1, -2, 1, 2) \end{matrix} \quad \mathcal{G}: \quad \begin{matrix} \mathbf{v}_1 = (1, 2, 1, 1) & \mathbf{v}_2 = (1, 1, 2, 1) \\ \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 2) & \mathbf{v}_4 = (2, 1, 1, 1) \end{matrix}$$

5. Skalární součin a jeho vlastnosti, norma indukovaná skalárním součinem.

6. Definujte

Lineárně závislé vektory
Množina gengerátorů vektorového prostoru
Mocnina matice
Algebraický doplněk prvku matice
Charakteristický polynom matice
Metrický prostor
Hlavní minor matice

Popište vlastnosti matice přechodu.

K $\diamondsuit$

1. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete $\mathbf{A}^{12}$, $\mathbf{A}^{n}$.

2. Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 12x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2_1 + 4x_2 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (2,1,2,-1) \quad \mathbf{v} = (-1,4,5,2) \\ \mathbf{w} &= (1,-2,-1,3) \end{aligned}$$

4. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v daných básních $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$.
$\mathcal{L} : \mathbf{R}_4 \to \mathbf{R}_3$
$\mathcal{L}(a,b,c,d) = (a+b+2c, a-b-d, 2a+b+c-2d)$
$\mathcal{F} : v_1 = (2,1,1,1), v_2 = (1,2,1,1), v_3 = (1,1,2,1), v_4 = (1,1,1,2)$
$\mathcal{G} : w_1 = (1,1,1), w_2 = (1,1,0), w_3 = (1,0,0)$

5. Izomorfismus vektorových prostorů.
6. Definujte
lineární obal vektorů
Kořen polynomu
Sklaádání permutací
Izomorfní vektorové prostory
Vlatní vektor matice
Unitární prostor
Gramova matice

Jak vypadajícm vlastní čísla a vlastní vektory symetrické matice?

A $\diamondsuit$

1. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Určete A^4.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = ax^2 + bx + c$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	1	2	3	4	5	6	7
y	6	8	10	12	11	11	7

4. Je dána bilineární forma $\psi(x, y)$ na prostoru $\mathbf{R}_3$. Určete matici $\mathcal{A}$ formy ve standardní bázi $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1$ a matici $\mathbf{B}$ formy v dané bázi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Najděte matici přechodu $\mathbf{T}$ mezi danými bázemi a ověřte, že $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T}$.

$$\begin{array}{rrrr} \psi(x,y) & = x_1y_1 & +2x_1y_2 & -x_1y_3 \\ & +x_2y_1 & +3x_2y_2 & +2x_2y_3 \\ & -3x_3y_1 & +x_3y_2 & -x_3y_3 \end{array}$$

$\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1)$ $\quad\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ $\quad\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$

5. Inverzní zobrazení, složené zobrazení a jejich matice.

6. Definujte

Množina generátorůvektorového prostoru
Polynom
Sudá permutace
Jádro lineárního zobrazení
Rozšířená matice soustavy rovnic
Podobné matice
Kvadratická forma

Vyslovte Steinitzovu větu o výměně.

2 ♠

1. Pomocí Laplaceova rozvoje vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Najděte matici inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Najděte bázi ortogonálního doplňku prostoru generovaného vektory $\mathbf{u} = (2, -1, 1, 2)$ a $\mathbf{v} = (1, 2, 3, -3)$.

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\begin{array}{lllllll} \mathcal{F}: & \mathbf{u}_1 = (1,1,0,0) & \mathbf{u}_2 = (0,1,1,0) & \mathcal{G}: & \mathbf{v}_1 = (3,2,1,1) & \mathbf{v}_2 = (1,3,2,1) \\ & \mathbf{u}_3 = (0,0,1,1) & \mathbf{u}_4 = (1,0,0,1) & & \mathbf{v}_3 = (1,1,3,2) & \mathbf{v}_4 = (2,1,1,3) \end{array}$$

5. Definitnost kvadratické formy, Sylvestrovo kritérium.

6. Definujte

Báze vektorového prostoru
Nulový vektor
Znaménko permutace
Singulární matice
Homogenní soustava rovnic
Ortogonální vektory
Negativně semidefinitní kvadratická forma

Popište Jordanův tvar matice.

3 ♠

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\begin{array}{rr} \mathbf{v}_1 = (2,1,2,1) & \mathbf{v}_2 = (1,2,1,2) \\ \mathbf{v}_3 = (-2,-2,-2,-2) & \mathbf{v}_4 = (1,2,3,-1) \\ \mathbf{v}_5 = (0,2,1,3) & \end{array}$$

generují prostor R^4.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= 2 \\ 9x_1 + 3x_2 - 15x_3 - 5x_4 &= -8 \end{aligned}$$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

5. Podobnost matic, Jordanův tvar matice.

6. Definujte

Souřadnice vektoru v dané bázi
Lineárně závislé vektory
Transponovaná matice
Elementární úpravy matice
Ekvivalentní soustavy rovnic
Norma vektoru
Gramova matice

Vyslovte větu o dělení polynomů se zbytkem.

4 ♠

1. Rozložte polynom

$$x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2$$

víte-li, že jedním z kořenů je $1 + i$.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 9x_1 + 3x_2 - 15x_3 - 5x_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. Najděte Jordanův tvar matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Určete matici lineárního zobrazení $\mathcal{L}$ v daných básních $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$.

$\mathcal{L} : \mathbf{R}_3 \to \mathcal{P}_2$
$\mathcal{L}(a, b, c) = (b + 2c)x^2 + (2a - b - c)x + a + b - c$
$\mathcal{F} : w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (0, 1, 1), w_3 = (0, 0, 1)$
$\mathcal{G} : p_1 = x^2 + x + 1, p_2 = x^2 + 1, p_3 = x^2$

5. Změna báze a matice přechodu.

6. Definujte

Stupeň polynomu
Souřadnice vektoru v dané bázi
Součin matic
Determinant matice
Vlastní vektor matice
Řetězec zobecněných vlastních vektorů
Kvadratická forma

Vyslovte Frobeniovu větu.

5 ♠

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\begin{array}{ll} \mathbf{v}_1 = (-2,1,1,1) & \mathbf{v}_2 = (1,-2,1,1) \\ \mathbf{v}_3 = (1,1,-2,1) & \mathbf{v}_4 = (1,1,1,-2) \end{array}$$

tvoří bázi prostoru R^4.

2. Najděte matici adjungovanou k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Najděte bázi ortogonálního doplňku prostoru generovaného vektory $\mathbf{u} = (1,-1,1,-2)$ a $\mathbf{v} = (1,2,1,-3)$.

4. Najděte matici přechodu mezi danými dvěma bázemi

$$\begin{array}{lll} \mathcal{F}: & \mathbf{u}_1 = (1,1,0,0) & \mathbf{u}_2 = (0,1,1,0) \\ & \mathbf{u}_3 = (0,0,1,1) & \mathbf{u}_4 = (1,0,0,1) \end{array} \quad \begin{array}{lll} \mathcal{G}: & \mathbf{v}_1 = (3,1,1,1) & \mathbf{v}_2 = (1,3,1,1) \\ & \mathbf{v}_3 = (1,1,3,1) & \mathbf{v}_4 = (1,1,1,3) \end{array}$$

5. Základnicm vlastnosti matic.

6. Definujte

Násobnost kořene polynomu
Čtvercová matice
Permutace
Matice lineárního zobrazení
Rozšířená matice soustavy rovnic
Podobné matice
Hlavní minor matice

Vyslovte zákon setrvačnosti kvadratických forem.

6 ♠

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 12x_1 + 4x_2 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = a + \frac{b}{x}$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	2	3	4	5	6	7	8
y	10	40	60	68	72	75	77

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

5. Nehomogenní soustavy rovnic.

6. Definujte

Nulový vektor
Diagonální matice
Inverze v permutaci
Monomorfismus
Řešitelná soustava rovnic
Ortogonální vektory
Matice bilineární formy

Vyslovte větu o determinantu součinu matic.

7 ♠

1. Řešte maticovou rovnici

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 &= -4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 12 \\ x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 22x_4 &= -32 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= 28 \end{aligned}$$

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = ax^2 + bx + c$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	6	3	1	1	2	4	7

4. Je dána bilineární forma $\psi(x, y)$ na prostoru $\mathbf{R}_3$. Určete matici $\mathcal{A}$ formy ve standardní bázi $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1$ a matici $\mathbf{B}$ formy v dané bázi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Najděte matici přechodu $\mathbf{T}$ mezi danými bázemi a ověřte, že $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T \mathbf{A}\mathbf{T}$.

$$\begin{aligned} \psi(x, y) \quad &= x_1y_1 \quad +2x_1y_2 \quad -x_1y_3 \\ &\quad +x_2y_1 \quad +3x_2y_2 \quad +2x_2y_3 \\ &\quad -3x_3y_1 \quad +x_3y_2 \quad -x_3y_3 \end{aligned}$$

$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$ $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$

5. Vektorový prostor, lineární závislost a nezávislost.

6. Definujte

Komutativní grupa
Dolní trojúhelníková matice
Znaménko permutace
Lineární zobrazení
Vlastní číslo matice
Norma vektoru
Pozitivně definitní kvadratická forma

Popište základní vlastnosti skalárního součinu.

8 ♠

1. Pomocí Laplaceova rozvoje vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Rozhodněte, pro která x je matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

singulární.

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	6	10	6	4	6	10	18

4. Bez výpočtu všech vlastních čísel ukažte, že následující symetrické matice nemohou být kongruentní.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Lineární zobrazení, jádro a obraz a jejich dimenze.

6. Definujte

Lineární kombinace vektorů
Matice typu mxn
λ-násobek matice
Inverzní matice
Rozšířená matice soustavy rovnic
Skalární součin vektorů
Ortogonální průmět vektoru do podprostoru

Popište Laplaceův rozvoj determinantu.

9 ♠

1. Pomocí Hornerova schématu určete číslo a tak, aby pro polynom

$$x^5 + 3x^3 + ax^2 - 2x + 3$$

platilo $f(3) = 2$.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 &= 11 \end{aligned}$$

3. Najděte ortogonální průmět vektoru $\mathbf{u} = (1, -3, -2, 1)$ do prostoru generovaného vektory $\mathbf{v} = (1, 2, 3, -3)$ a $\mathbf{w} = (-3, 2, -2, 1)$.

4. Najděte bázi jádra a obrazu následujícího lineárního zobrazení.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \quad & (2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4, \\ & -5x_2 + 5x_3 - 4x_4, 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - x_4) \end{aligned}$$

5. Hodnost matice, Gaussova eliminační metoda.

6. Definujte

Lineární kombinace vektorů
Hlavní diagonála matice
Mocnina matice
Stupňovitý tvar matice
Neřešitelná soustava rovnic
Lineární operátor
Kvadratická forma

Popište Jordanův tvar symetrické matice.

10 ♠

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\mathbf{v}_1 = (2,1,2,1) \quad \mathbf{v}_2 = (1,2,1,2)$$
$$\mathbf{v}_3 = (-2,-2,-2,-2) \quad \mathbf{v}_4 = (1,2,3,-1)$$
$$\mathbf{v}_5 = (0,1,1,-3)$$

generují prostor R^4.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

5. Skalární součin, jeho vlastnosti. Norma indukovaná skalárním součinem.

6. Definujte

Lineárně závislé vektory
Horní trojúhelníková matice
Skládání permutací
Determinant matice
Vlastní vektor matice
Ortogonální báze
Symetrická bilineární forma

Popište Jordanovu eliminační metodu pro hledání inverzní matice.

J ♠

1. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete $\mathbf{A}^{12}$, $\mathbf{A}^n$.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 6x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\mathbf{u} = (1,3,1,2) \quad \mathbf{v} = (3,1,1,4)$$
$$\mathbf{w} = (3,1,1,2)$$

4. Najděte bázi jádra a obrazu následujícího lineárního zobrazení.

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \quad & (2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4, 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4, \\ & -5x_2 + 5x_3 - 4x_4, 4x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 5x_4) \end{aligned}$$

5. Základní vlastnosti matic.

6. Definujte

Lineární obal vektorů
Polynom
Dimenze vektorového prostoru
Znaménko permutace
Matice přechodu
Homogenní soustava rovnic
Norma indukovaná skalárním součinem
Ortonormální báze

Vyslovte větu o dělení polynomů se zbytkem.

Q ♠

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\mathbf{v}_1 = (-3, 1, 1, 1) \quad \mathbf{v}_2 = (1, -3, 1, 1)$$
$$\mathbf{v}_3 = (1, 1, -3, 1) \quad \mathbf{v}_4 = (1, 1, 1, -3)$$

tvoří bázi prostoru R^4.

2. Řešte homogenní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 12x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\mathbf{u} = (1, 3, 1, 2) \quad \mathbf{v} = (3, 1, 1, 4)$$
$$\mathbf{w} = (3, 1, -1, 1)$$

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

5. Podobnost matic, Jordanův tvar matice.

6. Definujte

Konečně gengerovaný vektorový prostor
Lineárně nezávislé vektory
λ-násobek matice
Izomorfismus
Charakterictiský polynom matice
Eukleidovský prostor
Ortogonální průmět vektoru do podprostoru

Vyslovte Cramerovo pravidlo.

K ♠

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}$$

2. Najděte matici adjungovanou k matici

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Najděte Jordanův tvar matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 13 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Rozhodněte, zda jsou kongruentní matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

5. Kvadraticé formy a reálné symetrické matice.
6. Definujte

Souřadnice prostoru v dané bázi
Vektorový prostor
Permutace
Jádro lineárního zobrazení
Soustava m rovnic o n neznámých
Skalární souči vektorů
Inercie kvadratické formy

Popište postup řešení homogenní soustavy rovnic.

A ♠

1. Pomocí Hornerova schématu určete číslo a tak, aby pro polynom

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 - 4x + 3$$

platilo $f(3) = 0$.

2. Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Najděte řetězce zobecněných vlastních vektorů matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ -4 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$$

příslušné vlastnímu číslu 0.

4. Najděte bázi jádra a obrazu následujícího lineárního zobrazení.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \quad & (-x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4, 2x_1 + x_3 - 2x_4, \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4, 2x_1 - x_3 - 5x_4) \end{aligned}$$

5. Ortogonální a ortonormální báze prostoru. Gram–Schmidtův ortogonalizační proces.

6. Definujte

Vedoucí koeficient polynomu
Nulová matice
Sudá permutace
Lineární zobrazení
Řešitelná soustava rovnic
Jordanova buňka
Bilneární forma

Vyslovte Steinitzovu větu o výměně.

2 ♣

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= -3 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

3. Najděte jednotkový vektor kolmý k vektorům

$$\mathbf{u} = (-1, 2, 3, 1) \quad \mathbf{v} = (2, 3, 0, -1)$$
$$\mathbf{w} = (3, -1, 2, -1)$$

4. Je dána bilineární forma $\psi(x, y)$ na prostoru $\mathbf{R}_3$. Určete matici $\mathcal{A}$ formy ve standardní bázi $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1$ a matici $\mathbf{B}$ formy v dané bázi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Najděte matici přechodu $\mathbf{T}$ mezi danými bázemi a ověřte, že $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T\mathbf{AT}$.

$$\begin{array}{rrrr} \psi(x, y) & = x_1y_1 & +2x_1y_2 & -x_1y_3 \\ & +x_2y_1 & +3x_2y_2 & +2x_2y_3 \\ & -3x_3y_1 & +x_3y_2 & -x_3y_3 \end{array}$$

$\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 1)$ $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)$ $\mathbf{v}_3 = (1, 1, -1)$

5. Vlastní čísla a vlastní vektory matice.

6. Definujte

Vektorový prostor
Čtvercová matice
Transponovaná matice
Regulární matice
Soustava m rovnic o n neznámých
Ortogonální báze
Indefinitní kvadratická forma

Vyslovte Sylvestrovo kritérium.

3 ♣

1. Rozhodněte, zda jsou vektory
$v_1 = (-3, 1, 1, 1),\ \ v_2 = (1, -3, 1, 1),\ \ v_3 = (1, 1, -3, 1),\ \ v_4 = (1, 1, 1, -3)$
lineárně nezávislé.

2. Najděte matici inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\mathbf{u} = (-1, 2, 1, 1) \quad \mathbf{v} = (2, 1, 0, 1)$$
$$\mathbf{w} = (3, 1, 1, 2)$$

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

5. Inverzní a složené zobrazení a jejich matice.

6. Definujte

Grupa
Konečně gengerovaný vektorový prostor
Identická permutace
Elementární úpravy matice
Ekvivalentní soustavy rovnic
Norma indukovaná skalárním součinem
Inercie matice

Popište Jordanův tvar symetrické matice.

4 ♣

1. Řešte maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Cramerovým pravidlem řešte soustavu

$$\begin{aligned} -x + y + 2z &= 2 \\ x + 2y - z &= 3 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

3. Najděte bázi ortogonálního doplňku prostoru generovaného vektory $\mathbf{u} = (1, -2, 1, -2)$ a $\mathbf{v} = (1, 2, 2, -3)$.

4. Najděte bázi jádra a obrazu následujícího lineárního zobrazení.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \quad & (-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4, \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4, 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 3x_4) \end{aligned}$$

5. Vektorový prostor, lineární závislost a nezávislost.

6. Definujte

Lineární kombinace vektorů
Dolní trojúhelníková matice
Znaménko permutace
Hodnost matice
Vektor neznámých
Vzdálenost vektorů
Matice bilneární formy

Popište metodu nejmenších čtverců.

5 ♣

1. Určete číslo x tak, aby vektory
$v_1 = (1, 2, 1, 2)$, $v_2 = (3, 1, 1, 1)$, $v_3 = (1, 2, -3, 0)$, $v_4 = (1, -2, 1, x)$
byly lineárně závislé.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. Najděte ortogonální průmět vektoru $\mathbf{u} = (2, -1, -2, 2)$ do prostoru generovaného vektory $\mathbf{v} = (1, 2, 2, -3)$ a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 1)$.

4. Rozhodněte, zda jsou kongruentní matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Konstrukce inverzní matice pomocí determinantů.

6. Definujte

Lineárně nezávislé vektory
Matice typu mxn
Komutující matice
Determinant matice
Spektrum matice
Unitární prostor
Ortogonální doplněk podprostoru

Vyslovte zákon setrvačnosti kvadratických forem.

6 ♣

1. Pomocí Hornerova schématu určete číslo a tak, aby pro polynom

$$-x^5 + 3x^3 + ax^2 + 2x + 3$$

platilo $f(-2) = 1$.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= -5 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -1 \end{aligned}$$

3. Najděte ortogonální průmět vektoru $\mathbf{u} = (2, -1, -3, 1)$ do prostoru generovaného vektory $\mathbf{v} = (1, 3, 2, -3)$ a $\mathbf{w} = (-1, 2, 0, 1)$.

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = -4x_1^2 - x_2^2 - 40x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 8x_2x_3$$

5. Homogenní soustavy rovnic.

6. Definujte

Nulový polynom
Podprostor vektorováho prostoru
Lichá permutace
Matice lineárního zobrazení
Charakteristický polynom matice
Řetězec zobecněných vlastních vektorů
Ortogonální průmět vektoru do podprostoru

Popište hledání racionálních koeficientů polynomu s celočíselnými koeficienty.

7 ♣

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (-2, 1, 2, 1) & \mathbf{v}_2 &= (-1, 2, 1, 2) \\ \mathbf{v}_3 &= (-2, -2, 0, -2) & \mathbf{v}_4 &= (1, 3, 3, -1) \\ \mathbf{v}_5 &= (0, 2, 1, -3) \end{aligned}$$

generují prostor R^4.

2. Určete hodnost matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Najděte Jordanův tvar matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Najděte bázi jádra a obrazu následujícího lineárního zobrazení.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \quad & (-3x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4, \\ & x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4) \end{aligned}$$

5. Determinant matice a jeho základní vlastnosti.

6. Definujte

Součet vektorů
Konečně gengerovaný vektorový prostor
Mocnina matice
Izomorfismus
Nehomogenní soustava rovnic
Jordanova buňka
Matice bilineární formy

Popište hledání ortogonálního průmětu.

8 ♣

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 15 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_3 = 0x_2 + x_4 &= 11 \end{aligned}$$

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = ax^2 + bx + c$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	-3	-2	-1	1	2	3	4
y	6	10	14	17	19	20	21

4. Je dána bilineární forma $\psi(x, y)$ na prostoru $\mathbf{R}_3$. Určete matici $\mathcal{A}$ formy ve standardní bázi $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1$ a matici $\mathbf{B}$ formy v dané bázi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$. Najděte matici přechodu $\mathbf{T}$ mezi danými bázemi a ověřte, že $\mathbf{B} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T}$.

$$\begin{array}{rrrr} \psi(x,y) & = x_1y_1 & +2x_1y_2 & -x_1y_3 \\ & +x_2y_1 & +3x_2y_2 & +2x_2y_3 \\ & -3x_3y_1 & +x_3y_2 & -x_3y_3 \end{array}$$

$\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1)$ $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)$ $\mathbf{v}_3 = (-1, 1, 1)$

5. Inverzní matice, Jordanova eliminační metoda.

6. Definujte

Podprostor vektorového prostoru
Jednotková matice
Rovnost matic
Obraz lineárního zobrazení
Homogenní soustava rovnic
Ortogonální báze
Kongruentní matice

Popište Gaussovu eliminaci pro determinanty.

9 ♣

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n-1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n-2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

2. Cramerovým pravidlem řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ -x + y + 3z &= 10 \\ 2x - y + z &= 3 \end{aligned}$$

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = a + \frac{b}{x}$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	1	2	3	4	5	6	7
y	100	60	40	32	27	25	24

4. Rozhodněte, zda jsou kongruentní matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Soustavy s regulární maticí, Cramerovo pravidlo.

6. Definujte

Lineárně nezávislé vektory
Diagonální matice
Inverze v permutaci
Lineární zobrazení
Jednoznačně řešitelná soustava rovnic
Ortogonální vektory
Negativně definitní kvadratická forma

Popište Jordanův tvar matice.

10 ♣

1. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete A^4.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 &= 5 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 &= -2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 &= 7 \end{aligned}$$

3. Najděte řetězce zobecněných vlastních vektorů matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

příslušné vlastnímu číslu 0.

4. Najděte bázi jádra a obrazu následujícího lineárního zobrazení.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \quad & (-3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4, \\ & x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4, 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4) \end{aligned}$$

5. Matice lineárního zobrazení a její vlatnosti.

6. Definujte

Dělitelnost polynomů
Báze vektorového prostoru
Inverzní permutace
Singulární matice
Vlatní číslo matice
Metrický prostor
Kongruentní matice

Vyslovte Sarrusovo pravidlo.

J ♣

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1700 & 1717 & 1734 \\ 1500 & 1515 & 1545 \\ 1000 & 1020 & 1030 \end{vmatrix}$$

2. Najděte matici inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Najděte Jordanův tvar matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 + 4x_1x_2 - 12x_1x_3 - 2x_2x_3$$

5. Změna matice lineárního operátoru při změně báze.

6. Definujte

Opačný vektor
Hlavní diagonála matice
Symetrická matice
Regulární matice
Homogenní soustava rovnic
Norma vektoru
Pozitivně definitní kvadratická forma

Popište postup řešení nehomogenní soustavy rovnic.

Q ♣

1. Rozhodněte, zda vektory

$$\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 2, 1) \quad \mathbf{v}_2 = (-1, 2, 1, 2)$$
$$\mathbf{v}_3 = (-2, -2, 0, -2) \quad \mathbf{v}_4 = (1, 3, 3, -1)$$

tvoří bázi prostoru R^4.

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + 2x_3 + x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 10x_2 + 2x_3 - x_4 &= -2 \\ 2x_1 - x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ -2x_1 + 2x_2 &= -6 \end{aligned}$$

3. Pomocí Gram–Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi prostoru generovaného vektory

$$\mathbf{u} = (-1, 2, 1, 1) \quad \mathbf{v} = (2, 1, 0, 1)$$
$$\mathbf{w} = (3, 1, 1, 2)$$

4. Převeďte následující kvadratickou formu na součet čtverců a rozhodněte o její definitnosti.

$$\kappa(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

5. Změna báze a matice přechodu.

6. Definujte

Triviální lineární kombinace vektorů
Matice typu mxn
Součin matic
Minor matic
Charakteristický polynom matice
Skalární součin vektorů
Ortonormální báze

Vyslovte Cramerovo pravidlo.

K ♣

1. Nechť

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete $\mathbf{A}^{12}$, $\mathbf{A}^n$.

2. Najděte matici inverzní k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Najděte jednotkový vektor kolmý k vektorům

$$\mathbf{u} = (-1, -2, -1, 1) \quad \mathbf{v} = (2, 1, 2, -1)$$
$$\mathbf{w} = (1, -1, 2, -3)$$

4. Najděte bázi jádra a obrazu následujícího lineárního zobrazení.

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \quad (-3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4, 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4, 4x_1 - 5x_2 + x_3)$$

5. Nehomogenní soustavy rovnic.

6. Definujte

Lineárně závislé vektory
Horní trojúhelníková matice
Transpozice
Hodnost matice
Soustava m rovnic o n neznámých
Řetězec zobecněných vlastních vektorů
Negativně definitní kvadratická forma

Popište postup hledání racionálních kořenů polynomu s celočíselnými koeficienty.

A ♣

1. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & -4 & 1 \\ 6 & -12 & 12 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 4 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= -1 \\ -x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 3 \end{aligned}$$

3. Metodou nejmenších čtverců najděte funkci ve tvaru $Y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, která nejlépe vystihuje následující naměřené hodnoty

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
y	6	10	6	4	6	10	18

4. Bez výpočtu všech vlastních čísel ukažte, že následující symetrické matice nemohou být kongruentní.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

5. Báze a dimenze prostoru, souřadnice vektoru v dané bázi.
6. Definujte

Lineárně nezávislé vektory
Jednotková matice
Opačná matice
Algebraický doplněk prvku matice
Matice soustavy rovnic
Lineární operátor
Hlavní minor matice

Vyslovte Cramerovo pravidlo.