ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

KIV/VSP - Průběžná práce

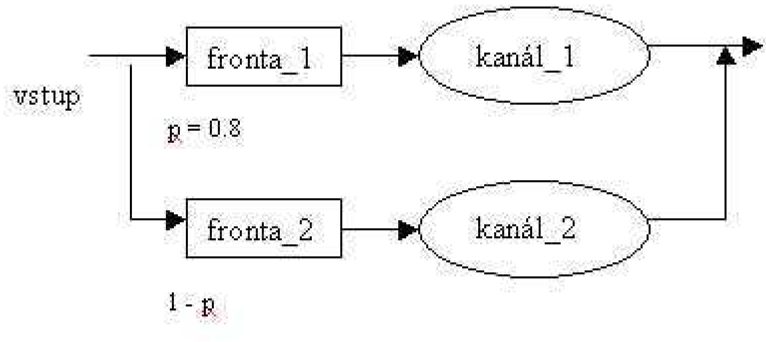
Sítě front

Příklad: 3 / 7

Jiří Kučera (A08N0092P)
Narozen 15. 2. 1985
kalwi@students.zcu.cz

Zadání

Pro zadanou otevřenou síť front určete L_q a T_q. Časové intervaly mezi vstupy požadavků mají exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 4$, oba kanály obsluhy mají exponenciálně rozdělenou dobu obsluhy s parametry $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 80$.



Kolik procent z dlouhého časového intervalu sledování sítě bude fronta_2 prázdná?

Řešení

Systém hromadné obsluhy (SHO) se skládá ze dvou SHO, jejichž střední frekvence vstupního proudu i střední frekvence obsluhy ve frontě je exponenciální a každý z nich má jeden kanál obsluhy. Jedná se tedy o dva SHO typu M/M/1 a počet kanálů každého SHO je m = 1.

L_q, tedy střední celkový počet požadavků v SHO, je roven součtu středních počtů požadavků v jednotlivých SHO:

$$L_q = \sum_i L_{q_i}$$

SHO se skládá z fronty a obslužného kanálu, proto je počet požadavků v SHO roven součtu počtu požadavků ve frontě a v obslužném kanálu:

$$L_{q_i} = L_{w_i} + L_{s_i}$$

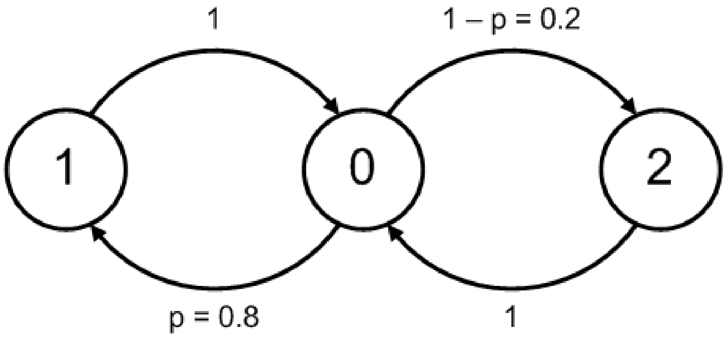
L_{wi} a L_{si} v uvedeném vzorci je pro exponenciální rozdělení vstupních toků možno rozepsat takto:

$$L_{q_i} = \frac{\rho_i^2}{1 - \rho_i} + \rho_i m_i$$

Zatížení kanálu ρ_i (pro počet kanálů m = 1) se určí jako podíl frekvence vnitřního toku uzlu a střední frekvence obsluhy:

$$\rho_i = \frac{\Lambda_i}{\mu_i}$$

Frekvence vnitřních toků uzlů Λ_i se určí ze soustavy rovnic, k jejíž sestavení pomůže graf, v němž uzly jsou obslužné systémy a hrany cesty mezi těmito systémy. Označení hran je pravděpodobnost, s níž se požadavek vydá po příslušné hraně. Uzel s označením 0 reprezentuje okolí sítě:



Soustava rovnic:

$$\Lambda_0 = \lambda = 4$$
$$\Lambda_1 = p\Lambda_0 = 0{,}8 \cdot 4 = 3{,}2$$
$$\Lambda_2 = (1 - \mathrm{p})\Lambda_0 = 0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8$$

Nyní lze zpětně dosadit do uvedených vzorců:

$$\rho_1 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \frac{3{,}2}{4} = 0{,}8 \qquad \rho_2 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2} = \frac{0{,}8}{80} = 0{,}01$$

$$L_{q_1} = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} + \rho_1 m_1 = \frac{0{,}8^2}{1-0{,}8} + 0{,}8 \cdot 1 \qquad L_{q_2} = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2} + \rho_2 m_2 = \frac{0{,}01^2}{1-0{,}01} + 0{,}01 \cdot 1$$

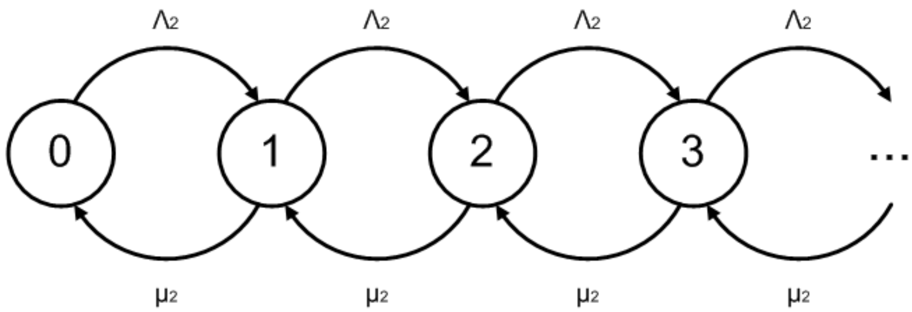
$$L_{q_1} = 4 \qquad L_{q_2} = 0{,}\overline{01}$$

$$L_q = L_{q_1} + L_{q_2} = 4 + 0{,}\overline{01} = 4{,}\overline{01}$$

Doba odezvy T_q se vypočte podle Littleova vzorce:

$$T_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{4{,}\overline{01}}{4} \doteq 1\, jednotka\ času$$

Kolik procent z celkového času bude druhá fronta prázdná, je možno zjistit analýzou markovského modelu druhého SHO:



Číslo stavu určuje, kolik požadavků je v SHO. Fronta je prázdná ve stavech 0, kdy v SHO není žádný požadavek, a ve stavu 1, kdy je jeden požadavek zpracováván v obslužném kanálu. V dalších stavech počínaje stavem 2 čekají požadavky ve frontě na zpracování.

Pravděpodobnost, že druhá fronta je prázdná, je tedy:

$$p = p_0 + p_1$$

Protože p_0 je pravděpodobnost, že v SHO není žádný požadavek, čili že není zatížen, je možno tuto hodnotu určit odečtením zatížení SHO od jedničky:

$$p_0 = 1 - \rho$$

Pravděpodobnost stavu 1 se určí z rovnice pro zjištění asymptotické pravděpodobnosti stavu 0, ze které je tuto hodnotu možno rovnou vyjádřit:

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1$$
$$p_1 = p_0 \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \rho = (1 - \rho)\rho$$

Dosazením do prvního vztahu (za ρ se dosadí hodnota ρ_2 vypočtená dříve) se vypočte hledaná pravděpodobnost:

$$p = (1 - \rho) + (1 - \rho)\rho$$

$$p = (1 - 0{,}01) + (1 - 0{,}01) \cdot 0{,}01 = 0{,}9999 = 99{,}99\ \%$$

Závěr

Výpočet požadovaných hodnot se provedl dosazováním do vzorců uvedených v přednáškách.

Střední celkový počet požadavků v SHO:	$L_q = 4,\overline{01}$
Doba odezvy:	$T_q \doteq 1\ jednotka\ času$
Kolik procent celkového času je druhá fronta prázdná:	$p = 99{,}99\ \%$