Samostatná práce z KIV/VSP
příklad č. 2, okruh 6

Ivan Habernal, A02226
e-mail: habernal@students.zcu.cz
datum narození: 5. 7.

1 Zadání

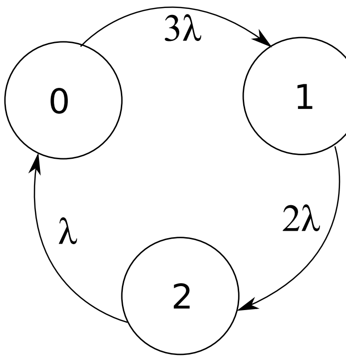
Vytvořte markovský model pro $n = 3$ vlákna a jednu bariéru. Vlákna fungují podle stejného programu a realizují výpočet v nekonečné smyčce, která se skládá z lokálního výpočtu a synchronizace (čekání) na bariéře. Doba lokálního výpočtu má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = 0,5$. Režijní čas synchronizační operace zanedbáváme. Z modelu vypočítejte střední frekvenci cyklu výpočtu vlákna (je pro všechna vlákna stejná) a porovnejte ji s případem, kdy doba lokálního výpočtu je pevná (nenáhodná a stejná pro všechna vlákna) a rovná střední hodnotě zadaného exponenciálního rozdělení. Dále z modelu určete, jak dlouho v průměru čekají na bariéře 2 vlákna (tj. doba po kterou 2 vlákna čekají na poslední třetí vlákno).

2 Řešení

Markovský model bude mít následující tři stavy:

- **stav 0**: všechny tři vlákna pracují,
- **stav 1**: dvě vlákna pracují a jedno čeká na bariéře,
- **stav 2**: jedno vlákno pracuje a zbylá dvě čekají na bariéře.

Graf přechodů potom bude vypadat následovně



Obrázek 1: Graf přechodů

Jednotlivé přechody mají následující hodnoty:

- intenzita přechodu λ_{01} (ze stavu 0 do 1) má hodnotu 3λ – pravděpodobnost, že ukončí činnost jedno vlákno, krát tři (3 vlákna běží);
- intenzita přechodu λ_{12} má hodnotu 2λ – pravděpodobnost, že jedno vlákno ukončí činnost, když dvě vlákna běží, krát dvě;

- intenzita přechodu λ_{20} má hodnotu λ – doběhlo poslední vlákno.

Odpovídající soustava rovnic pro limitní pravděpodobnosti stavů je pak ve tvaru

$$\begin{array}{lrcl} 0: & 0 & = & -3\lambda p_0 + \lambda p_2 \\ 1: & 0 & = & 3\lambda p_0 - 2\lambda p_1 \\ 2: & 0 & = & 3\lambda p_1 - \lambda p_1 \end{array}$$

a omezující podmínka (součet všech limitních p-stí je 1)

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1.$$

Odtut pak po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\begin{array}{rcl} 3p_0 & = & p_2 \\ 3p_0 & = & 2p_1 \\ 2p_1 & = & p_2 \end{array}$$

a řešení $p_0 = \frac{2}{11}$; $p_1 = \frac{3}{11}$ a $p_2 = \frac{6}{11}$.

Střední frekvence cyklu výpočtu vlákna

Jelikož je činnost jednoho vlákna ukončena po průchodu každým stavem, stačí pro zjištění frekvence cyklu vypočítat střední frekvenci průchodu jakýmkoliv stavem $f_i = p_i\lambda_i$, kde λ_i je součet intenzit výstupních hran stavu i. Tedy např. pro stav **0**:

$$\begin{array}{rcl} f_i & = & p_i\lambda_i \\ f_0 & = & \dfrac{3}{11} \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} \\ f_0 & \doteq & 0,4 \qquad [s^{-1}] \end{array}$$

Průměrná doba čekání dvou vláken na bariéře

Pro pevnou dobu lokálního výpočtu je pak střední frekvence výpočtu vlákna

$$f_i = 0,5 \qquad [s^{-1}]$$

Střední frekvenci f_i průchodů stavem i získáme součtem frekvencí průchodů po výstupních hranách stavu i jako

$$f_i = p_i\lambda_i,$$

kde λ_i je součet intenzit přechodů na výstupních hranách stavu i. Střední doba průchodů stavem i je převrácené hodnota frekvence f_i, čili

$$T_i = \frac{1}{f_i}$$

Odtut tedy dosazením za $\lambda = 0,5$ a $p_2 = \frac{6}{11} \doteq 0,54$ dostaneme

$$T_i = \frac{1}{0,54 \cdot 3 \cdot 0,5} \doteq 1,23 \qquad [\mathrm{s}]$$

Reference

[1] Racek S.: *Pravděpodobnostní modely počítačů*, (nevydáno).