



ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Samostatná práce č. 1 z předmětu KIV/VSP

Okruh 6: Erlangovo rozdělení druhého stupně

Ivan Habernal (A02226)

habernal@students.zcu.cz

datum narození: 5. 7.

Erlangovo rozdělení

Hustota pravděpodobnosti Erlangova rozdělení je

$$f(x; k; \lambda) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \quad \text{pro } x > 0.$$

Distribuční funkce má tvar

$$F(x; k; \lambda) = \frac{\gamma(k, \lambda x)}{(k-1)!},$$

kde γ je neúplná gamma funkce. Střední hodnota Erlangova rozdělení je

$$E(X) = \frac{k}{\lambda}$$

a rozptyl

$$D(X) = \frac{k}{\lambda^2}.$$

Erlangovo rozdělení druhého stupně lze nahradit součtem dvou exponencionálních rozdělení, přičemž hustota exponencionálního rozdělení má tvar

$$f(x; \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{pro } x \geq 0$$

a distribuční funkce pak

$$F(x, \lambda) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{pro } x \geq 0.$$

Inverzní transformace

Metoda umožňuje transformaci náhodných čísel Y s normalizovaným rovnoměrným rozdělením na čísla X zadaná distribuční funkcí $F(x)$ jejich pravděpodobnostního rozdělení. Generátor normalizovaného rozdělení (tedy např. knihovna v `JDK Math.random()`) vygeneruje konkrétní hodnotu y a transformuje ji podle vzorce

$$x = F^{-1}(y).$$

Toho lze využít, pokud je distribuční funkce $F(x)$ zadána analyticky a lze jednoduše určit její inverzní funkci $F^{-1}(x)$.

Pro exponencionální rozdělení dané distribuční funkcí $F(x, \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$ lze po úpravách najít inverzní funkci ve tvaru

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y),$$

ale vzhledem k tomu, že soubor prvků $1 - y$ a y má stejné normované rovnoměrné rozložení, lze vzorec upravit na

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(y).$$

Programové zpracování

Program jsem zpracoval v jazyce Java s využitím knihovny Apache Commons Math 1.1 (pouze pro statistiky). Listing programu záměrně nevypisuji (zbytečně dlouhé, navíc jsou součástí odevzdávání).

Pro sestavení jsem používal nástroj Apache Ant – tasky *compile*, *clean* a *dist*. Ant je nutné mít pro znovuzkompilování, nikoli však pro vlastní běh.

Ukázka výstupu

Volil jsem 10000 opakování a $\lambda=2$.

```
D:\Skola\vsp\vsp-cvic1\dist>java -cp vsp1.jar;commons-math-1.1.jar cz.habi.vsp.sem1.Main 10000 2
E_teorie=1.0
D_teorie=0.5
E_vypocet=0.9962582303285071
D_vypocet=0.48939367242083687
```

```
Histogram:
0.0: *****
0.1: *****
0.2: *****
0.3: *****
0.4: *****
0.5: *****
0.6: *****
0.7: *****
0.8: *****
0.9: *****
1.0: *****
1.1: *****
1.2: *****
1.3: *****
1.4: *****
1.5: *****
1.6: *****
1.7: *****
1.8: *****
1.9: *****
2.0: *****
2.1: *****
2.2: *****
2.3: *****
2.4: *****
2.5: *****
2.6: *****
2.7: *****
2.8: *****
2.9: *****
3.0: *****
3.1: *****
3.2: *****
3.3: *****
3.4: *****
3.5: *****
3.6: *****
3.7: *****
3.8: *****
3.9: *****
4.0: *****
4.1: *****
4.2: *****
4.3: *****
4.4: *****
4.5: *****
4.6: *****
4.7: *****
4.8: *****
4.9: *****
5.0: *****
5.1: *****
5.2: *****
5.3: *****
5.4: *****
```

Zdroje

- [1] Wikipedia, *Erlang Distribution* (http://en.wikipedia.org/wiki/Erlang_distribution)
- [2] J. Reif, Z. Kobeda, *Úvod do pravděpodobnosti a spolehlivosti*, 2002, skripta ZČU
- [3] S. Racek, *Pravděpodobnostní modely počítačů*, skripta ZČU, nevydáno