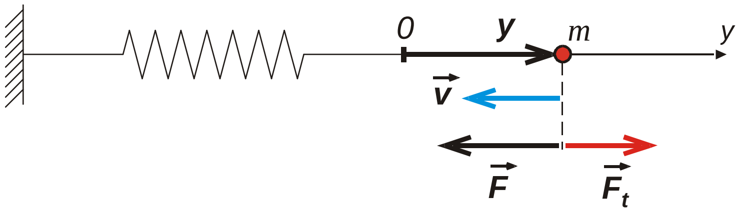
Tlumené kmity

V praxi téměř vždy brání pohybu nějaká brzdicí síla, jejíž původ je v třecích silách mezi reálnými tělesy. Matematický popis těchto sil bývá dosti komplikovaný. Velmi často se vyskytuje tzv. ***viskózní tření*** , kdy je velikost třecí síly úměrná rychlosti :

$$\boxed{\vec{F}_t = -B \cdot \vec{v} = -B \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}$$



Potom je nutno přidat tuto sílu k pružné síle oscilátoru. V našem jednorozměrném případě tak vznikne rovnice :

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -k \cdot y - B \cdot \frac{dy}{dt}$$

Jednoduchými úpravami a použitím standardního označení derivací dostaneme :

$$\ddot{y} + \frac{B}{m} \cdot \dot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

Označme v této rovnici, stejně jako u netlumených kmitů :

$$\boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$

vlastní úhlová frekvence

Název „vlastní“ u úhlové frekvence označuje její příslušnost k netlumené sestavě „pružina–hmotný bod“, bez působení brzdicích třecích sil . S touto vlastní frekvencí by tedy kmital náš hmotný bod jako netlumený lineární harmonický oscilátor.

Dále zavedeme v pohybové rovnici novou konstantu b, která vyjadří intenzitu účinku brzdicích sil (je úměrná brzdnému zrychlení) :

$$\boxed{\frac{B}{m} = 2b}$$

konstanta útlumu

A dostaneme tak konečný, nejjednodušší tvar pohybové rovnice :

$$\boxed{\ddot{y} + 2b\,\dot{y} + \omega^2 y = 0}$$

pohybová rovnice tlumených kmitů

Je to lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty . Připomeňme, že každá taková rovnice má partikulární řešení (integrál) :

$$y = C \cdot e^{\alpha . t}$$

Přitom C je libovolná (integrační) konstanta a α je kořenem tzv. charakteristické rovnice , která vznikne dosazením tohoto řešení do diferenciální rovnice.

Obecné řešení diferenciální rovnice n-tého řádu je pak lineární kombinací n nezávislých partikulárních řešení :

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 . t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 . t} + C_3 \cdot e^{\alpha_3 . t} + \ldots\ldots$$

Tolik k obecné teorii. Dosaďme nyní výše uvedený partikulární integrál do naší diferenciální rovnice a po vykrácení exponencielních výrazů dostaneme charakteristickou rovnici :

$$\boxed{\alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2 = 0}$$

Tato rovnice je kvadratická, můžeme tedy hned napsat její standardní řešení :

$$\alpha_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$$

Existují tak dvě partikulární řešení a obecné řešení bude mít tvar :

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 . t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 . t}}$$

O konkrétním tvaru tohoto matematického výrazu pak rozhodne velikost konstant b a ω :

1) **případ malého tlumení (b < ω)**

Za této podmínky vznikne pod odmocninou záporný výraz a oba kořeny charakteristické rovnice jsou proto komplexní čísla :

$$\alpha_{1,2} = -b \pm i.\sqrt{\omega^2 - b^2}$$

Tento výraz ještě zjednodušíme označením :

$$\boxed{\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2}}$$

úhlová frekvence tlumených kmitů

(Důvod tohoto názvu poznáme z dalších řádků.)

Pak tedy bude :

$$\alpha_{1,2} = -b \pm i.\omega_1$$

A obecné řešení zapíšeme :

$$y = C_1 \cdot e^{(-b + i.\omega_1).t} + C_2 \cdot e^{(-b - i.\omega_1).t} = e^{-b.t} \cdot (C_1 \cdot e^{+i.\omega_1 . t} + C_2 \cdot e^{-i.\omega_1 . t})$$

Vidíme, že toto řešení je také komplexní, má tvar součinu reálného členu a komplexního výrazu v závorce , který ovšem již umíme identifikovat – je to komplexní vyjádření obyčejných, **netlumených** harmonických kmitů s úhlovou frekvencí ω_1 .

Pro vyhodnocení skutečných výchylek převedeme raději toto komplexní vyjádření na „obyčejnou“ obecnou sinusovku (stačí vhodně zvolit integrační konstanty - viz minulá kapitola „Netlumené kmity“, strana 9), první reálný člen samozřejmě ponecháme.

Vztah pro skutečnou výchylku tlumených kmitů bude mít potom tvar :

$$\boxed{y = A \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \varphi_o)}$$

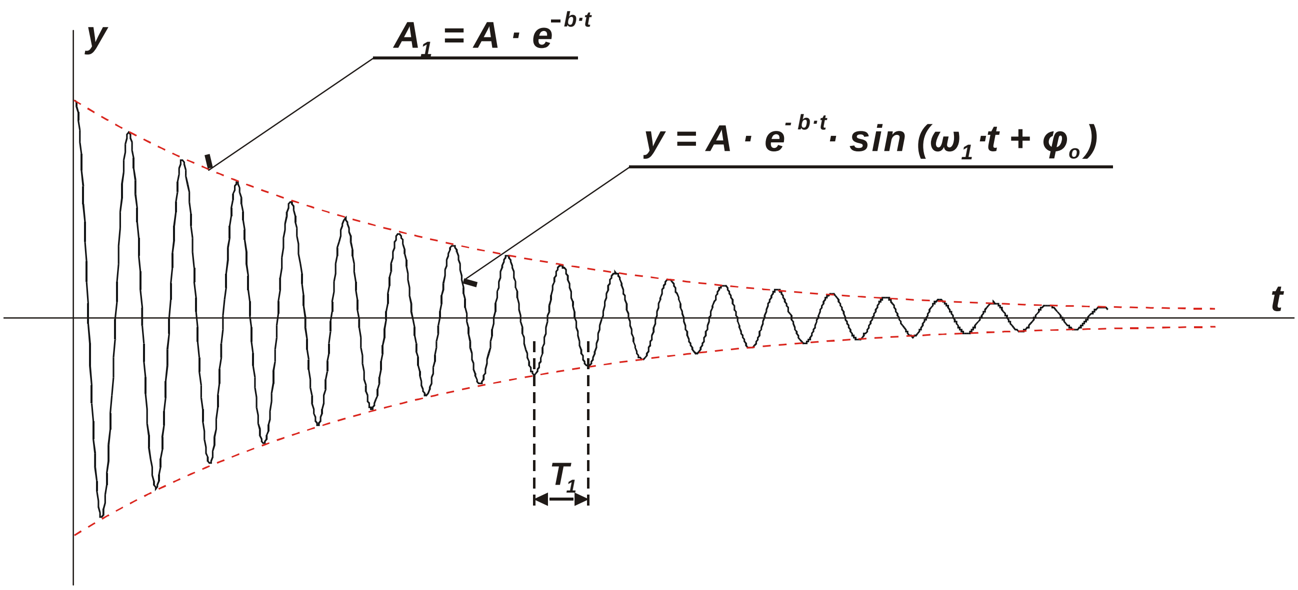
tlumené kmity

I když získaný vztah obsahuje funkci sinus, dokonce se standardním tvarem fáze, nemůžeme ho označit jako harmonické kmity, protože před sinem není konstantní amplituda, ale klesající exponenciela, která sinusovku určitým způsobem „deformuje“.

Jestliže by ovšem tlumení nebylo „příliš vysoké“ – což by se projevilo tak, že hmotný bod by vykonal „větší počet“ výkyvů na obě strany, než by se jeho maximální výchylka „silně přiblížila“ k nulové rovnovážné poloze (viz následující obrázek) – pak bychom takové kmity mohli interpretovat jako kvaziharmonické (přibližně harmonické) , které sice mají stálou úhlovou frekvenci ω_1 , ale proměnnou amplitudu , klesající s časem podle vztahu :

$$\boxed{A_1 = A \cdot e^{-b.t}}$$

amplituda tlumených kmitů



<u>Pozn. :</u> Pro grafické znázornění kmitů bylo nutno pomocí ***<u>okrajových podmínek</u>*** úlohy konkrétně vypočítat konstanty A a φ v obecné rovnici kmitů (jsou to tedy dvě integrační konstanty, jako v každém řešení diferenciální rovnice druhého řádu).

Nejjednodušší je definovat ***<u>počáteční podmínky</u>*** pohybu : nechť například vychýlíme hmotný bod (tj. natáhneme pružinu) do nějaké počáteční klidové polohy (například jednotkové) a pak ho vypustíme s počáteční nulovou rychlostí - velikosti výchylky a rychlosti hmotného bodu v počátečním (nulovém) čase tedy budou :

$$y(0) = y_o = konst = 1 \ [m]$$

$$v(0) = v_o = konst. = 0 \ [m/s]$$

Nyní napíšeme obecnou rovnici pro výchylku :

$$y = A \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \varphi_o)$$

A její derivací určíme vztah pro rychlost :

$$v = \frac{dy}{dt} = A \cdot (-b) \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \varphi_o) + A \cdot e^{-b.t} \cdot \omega_1 \cdot cos(\omega_1 t + \varphi_o)$$

Do těchto rovnic pak dosadíme stanovenou počáteční výchylku a počáteční rychlost :

$$y_o = 1 = A \cdot e^{-b.0} \cdot sin(\omega_1 .0 + \varphi_o) = A \cdot sin\varphi_o$$

$$v_o = 0 = A \cdot (-b) \cdot e^{-b.0} \cdot sin(\omega_1 .0 + \varphi_o) + A \cdot e^{-b.0} \cdot \omega_1 \cdot cos(\omega_1 .0 + \varphi_o)$$
$$= -b \cdot A \cdot sin\,\varphi_o + A \cdot \omega_1 \cdot cos\,\varphi$$

Dostaneme tak dvě rovnice pro dvě neznámé integrační konstanty. Pro jejich řešení platí :

$$A = \frac{1}{sin\,\varphi_o}$$

$$tg\,\varphi_o = \frac{\omega_1}{b}$$

Goniometrické funkce ovšem neumožňují jednoduché explicitní vyjádření integračních konstant, řešme proto jen případ velmi malého tlumení ($b << \omega$), kdy můžeme přibližně psát :

$$\omega_1 \cong \omega \qquad tg\,\varphi_o >> 1$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_o \cong \frac{\pi}{2} \qquad A \cong 1$$

Konkrétní vztah pro výchylku pak bude mít jednoduchý tvar :

$$y = 1 \cdot e^{-b.t} \cdot sin(\omega_1 t + \frac{\pi}{2})$$

Nebo-li :

$$\boxed{y = e^{-b.t} \cdot cos\,\omega_1 t}$$

Aby bylo zaručeno velmi malé tlumení pohybu, byl pro znázornění této funkce na předchozím obrázku použit poměr $\omega : b = 40 : 1$.

Z výše uvedeného vztahu pro ω_1 :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2} < \omega$$

je dobře vidět, že <u>úhlová frekvence</u> ω_1 tlumených kmitů je <u>menší</u> než vlastní úhlová frekvence ω (kterou by měl oscilátor, kdyby nebyl tlumen).

Doba kmitu je tedy větší – jinak řečeno - ***tlumené kmitání je pomalejší než netlumené*** :

$$\boxed{T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \geq \frac{2\pi}{\omega} = T}$$

Běžně používané označení perioda pro T_1 zde není příliš vhodné, protože tlumený pohyb vlastně - matematicky přesně vzato - není periodický – průběh funkce se přece kvůli klesající amplitudě nikdy neopakuje .

Pozn. : Tlumené kmity jsou tedy také pseudoperiodickým pohybem : nulové body za sebou sice následují po době rovné polovině doby kmitu T_1 , stejně taková je i doba mezi dvěma po sobě následujícími krajními výchylkami, ale například pohyb oscilátoru z nulové polohy do krajní výchylky trvá kratší než dobu než pohyb z této krajní výchylky zpět do nulové polohy.

Brzdicí síla tedy kmity harmonického oscilátoru zpomalí a postupně zmenšuje jejich amplitudu . Velikost konstanty útlumu b má proto zásadní vliv na vzniklý pohyb hmotného bodu.

Protože doba kmitu T_1 je periodou funkce sinus, můžeme jednoduše vypočítat poměr dvou po sobě následujících maximálních výchylek na jednu stranu - tedy výchylek v časech t a $t + T_1$:

$$\frac{y(t)}{y(t+T_1)} = \frac{A\cdot e^{-b.t}\cdot sin(\omega_1 t+\varphi_o)}{A\cdot e^{-b.(t+T_1)}\cdot sin(\omega_1 (t+T_1)+\varphi_o)} = e^{+b.T_1}$$

Tento (bezrozměrný) poměr se označuje jako ***útlum*** λ a vidíme, že je stejný pro libovolná dvě stejnolehlá maxima - pro daný tlumený oscilátor je tedy charakteristickou, konstantní veličinou (stejně jako konstanta útlumu b) :

$$\boxed{\lambda = \frac{y(t)}{y(t+T_1)} = e^{+b.T_1}}$$

útlum

Jeho přirozený logaritmus se nazývá ***logaritmický dekrement*** δ tlumených kmitů :

$$\boxed{\delta = ln\,\lambda = b\cdot T_1 = 2\pi\frac{b}{\omega_1}}$$

logaritmický dekrement

Se znalostí těchto veličin je pak možno u daného oscilátoru jednoduše stanovit konstantu útlumu, potřebnou pro vyřešení pohybové rovnice (přímé experimentální určení této konstanty z její definice totiž jistě není jednoduchou záležitostí - musíme mít prostředky pro měření jak brzdné síly, tak rychlosti tělesa i jeho hmotnosti) :

Postačí pouze oscilátor rozkmitat a ze změřené periody kmitů a z poměru stejnolehlých maxim ihned přímo vypočítáme konstantu útlumu :

$$\boxed{b = \frac{\delta}{T_1} = \frac{ln\,\lambda}{T_1}}$$

Jelikož amplituda určuje celkovou mechanickou energii kmitů, je zřejmé, že u tlumených kmitů dochází k postupnému poklesu této energie, v limitě až na nulovou hodnotu, kdy kmity vymizí.
Úbytek celkové energie je způsoben prací brzdicí síly a tato práce se u třecích sil „bez užitku“ mění na tepelnou energii.

Protože viskózní třecí síla, úměrná rychlosti, neovlivní mechanickou energii hmotného bodu (při výpočtu potenciální energie se uvažuje nekonečně pomalý pohyb, kdy je tato síla nulová, a při výpočtu energie kinetické hraje roli pouze rychlost), můžeme pro stanovení energie tlumených kmitů využít vztah, odvozený v minulé kapitole pro volně kmitající hmotný bod :

$$W = W_p + W_k = \frac{1}{2} m\,\omega^2 A^2$$

Do této rovnice pak pouze dosadíme parametry tlumených kmitů – jejich úhlovou frekvenci a amplitudu :

$$W = \frac{1}{2} m\,\omega_1^2 A_1^2 = \frac{1}{2} m\,\omega_1^2 (A \cdot e^{-b.t})^2 = \frac{1}{2} m\,\omega_1^2\, A^2 \cdot e^{-2\,b.t}$$

Vznikne tak použitelný vztah pro celkovou mechanickou energii tlumeného oscilátoru :

$$\boxed{W = \frac{1}{2} m\,\omega_1^2\, A^2 \cdot e^{-2\,b.t}}$$

energie tlumeného oscilátoru

Je dobře vidět, že celková energie tlumeného oscilátoru je exponenciálně klesající funkcí času, limitně se blížící nulové hodnotě, stejně jako výchylka tlumených kmitů.
Přitom úbytek celkové energie tlumeného oscilátoru za jednotku času můžeme lehce vypočítat jako časovou derivaci této funkce :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m\,\omega_1^2\, A^2 \cdot e^{-2\,b.t}\right) = \frac{1}{2} m\,\omega_1^2\, A^2 \cdot e^{-2\,b.t} \cdot (-2\,b) = -2\,b \cdot W$$

Během jedné periody kmitů tedy dojde ke ztrátě energie o (kladné) velikosti :

$$W_1 = \left|\frac{dW}{dt}\right| \cdot T_1 = 2\,b \cdot W \cdot T_1 = \frac{2\,b \cdot W \cdot 2\pi}{\omega_1} = \frac{4\pi\,b \cdot W}{\omega_1}$$

Namísto této veličiny se ale úbytek energie tlumených kmitů většinou charakterizuje relativní veličinou ***kvalita oscilátoru*** (quality factor) ***Q*** , která se definuje jako 2π – násobek podílu střední hodnoty celkové energie oscilátoru (v jedné periodě kmitů) a ztráty této energie během jedné periody kmitů :

$$\boxed{Q = 2\pi \cdot \frac{W_{stř}}{W_1}}$$

kvalita oscilátoru

Po dosazení z předchozí rovnice dostaneme :

$$Q = 2\pi \cdot \frac{W_{stř}}{W_1} = 2\pi \cdot \frac{W_{stř} \cdot \omega_1}{4\pi b \cdot W} = \frac{\omega_1}{2b} \cdot \frac{W_{stř}}{W}$$

Velký praktický význam, zejména v elektronice, má případ ***velmi malého tlumení*** , kdy konstanta tlumení je daleko menší než vlastní frekvence oscilátoru :

$$\boxed{b \ll \omega}$$

velmi malé tlumení

V tomto případě během jedné periody se amplituda kmitů a tedy i energie zmenší jen nepatrně a proto střední hodnota energie během této periody je přibližně rovna okamžité energii (v kterémkoliv místě periody) :

$$W_{stř} \cong W$$

A stejně tak frekvence nucených kmitů je přibližně rovna vlastní frekvenci oscilátoru :

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - b^2} \cong \omega$$

Potom ovšem bude :

$$Q = \frac{\omega_1}{2b} \cdot \frac{W_{stř}}{W} = \frac{\omega}{2b} \cdot \frac{W}{W} = \frac{\omega}{2b}$$

A pro kvalitu oscilátoru tedy dostáváme velmi jednoduchý vztah, který obsahuje pouze základní koeficienty z pohybové rovnice :

$$\boxed{Q = \frac{\omega}{2b}}$$

kvalita oscilátoru (při velmi malém tlumení)

Je zřejmé, že kvalita oscilátoru je potom velmi vysoká :

$$Q = \frac{\omega}{2b} \gg 1$$

A je také dobře vidět rozumný smysl této veličiny : **oscilátor s vysokou kvalitou** Q - musí mít (při dané frekvenci) malou konstantu tlumení b - jeho amplituda tedy bude s časem klesat jen velmi pomalu – a proto takový oscilátor **vydrží kmitat velmi dlouhou dobu** , než se utlumí.

2) **případ silného tlumení (b > ω)**

Nyní je pod odmocninou kladný výraz a kořeny charakteristické rovnice jsou tedy reálné a oba dva jsou zřejmě záporné:

$$\alpha_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2} \quad < \quad 0$$

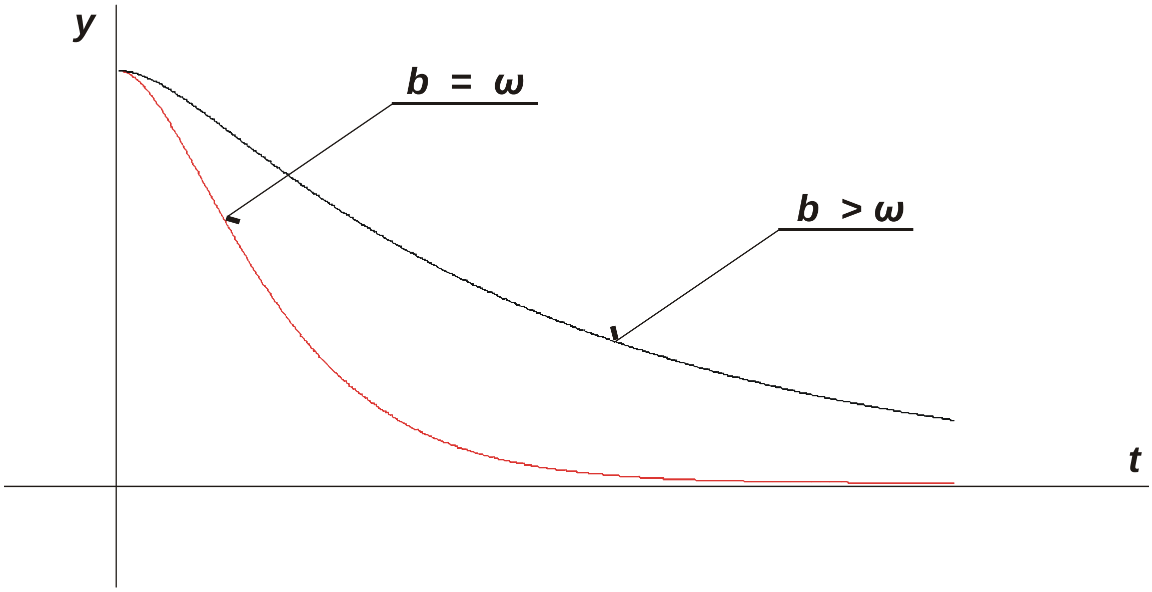
A obecné řešení je potom také reálným výrazem :

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 . t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 . t}}$$

silné tlumení

Tato funkce jako superpozice (součet) dvou **záporných exponenciel** je monotónně klesající a asymptoticky se blíží nulové hodnotě (viz obr.).

Vychýlíme-li tedy silně tlumený oscilátor, vrací se zvolna zpět do rovnovážné polohy, aniž by překmitnul do opačné výchylky. Takový pohyb se nazývá ***aperiodický*** .



Pozn. : Pro grafické znázornění kmitů určíme opět integrační konstanty, nyní to jsou konstanty C_1 a C_2 , pomocí stejných okrajových podmínek jako u malého tlumení (tj. jednotková počáteční výchylka hmotného bodu a jeho nulová počáteční rychlost), které dosadíme do obecné rovnice pro výchylku a do z ní vypočítaného vztahu pro rychlost :

$$y = C_1 \cdot e^{\alpha_1 . t} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 . t}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 . t} + C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 . t}$$

Tak dostaneme :

$$y_o = 1 = C_1 \cdot e^{\alpha_1 . 0} + C_2 \cdot e^{\alpha_2 . 0} = C_1 + C_2$$

$$v_o = 0 = C_1 \cdot \alpha_1 \cdot e^{\alpha_1 . 0} + C_2 \cdot \alpha_2 \cdot e^{\alpha_2 . 0} = C_1 \cdot \alpha_1 + C_2 \cdot \alpha_2$$

Řešení těchto dvou rovnic je :

$$C_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$C_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Dostáváme tak konkrétní vztah pro výchylku, do kterého pak dosadíme zvolenou konstantu útlumu a vlastní úhlovou frekvenci (jsou obsažené v konstantách C_1 a C_2, viz výše) :

$$\boxed{y = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_1 .t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_2 .t}}$$

Pro výpočet křivky v uvedeném grafu byl použit poměr $b : \omega = 10 : 8$.

Pro zajímavost můžeme ještě zhodnotit extrémní (limitní) případ velmi silného tlumení, kdy by konstanta útlumu byla nesrovnatelně větší než úhlová frekvence (b >> ω) - a kdy by tedy platilo :

$$\alpha_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega^2} \approx 0$$

$$\alpha_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega^2} \approx -2 \cdot b$$

Pak by integrační konstanty měly velikost :

$$C_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{-(-2b)}{0 - (-2b)} = 1$$

$$C_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{0}{0 - (-2b)} = 0$$

A výchylka hmotného bodu by prakticky zůstávala na počáteční hodnotě :

$$y = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_1 .t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot e^{\alpha_2 .t} \approx 1 \cdot e^{0.t} + 0 \cdot e^{-2b.t} = 1$$

Velmi silné brzdicí síly by tedy nedovolily návrat hmotného bodu do nulové polohy (v konečném čase).

3) mezní případ tlumení (b = ω)

Za těchto podmínek existuje jediný kořen charakteristické rovnice :

$$\alpha_{1,2} = -b$$

A dostaneme tedy jediné partikulární řešení :

$$y = C \cdot e^{-b.t}$$

Druhé nezávislé partikulární řešení pak muselo být nalezeno zcela jiným matematickým postupem - uvedeme zde pouze výsledek :

$$y = C \cdot t \cdot e^{-b.t}$$

Lineární kombinací těchto výrazů pak opět vytvoříme obecné řešení diferenciální rovnice pro případ mezního tlumení :

$$\boxed{y = C_1 \cdot e^{-b.t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-b.t} = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-b.t}}$$

mezní tlumení

Výchylka nemění znaménko, pohyb je opět aperiodický, funkce však **klesá k nule nejrychlejším** možným způsobem, jde o tzv. ***mezní aperiodický pohyb*** (viz obr.).

Je to případ nejdokonalejšího tlumení kmitavého pohybu.

Pozn. : Pro grafické znázornění kmitů určíme opět integrační konstanty C_1 a C_2 , pomocí stejných okrajových podmínek jako u malého tlumení, tj. jednotková počáteční výchylka hmotného bodu a jeho nulová počáteční rychlost, které dosadíme do obecné rovnice pro výchylku a do z ní vypočítaného vztahu pro rychlost :

$$y = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot e^{-b.t}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = (C_1 + C_2 \cdot t) \cdot (-b) \cdot e^{-b.t} + C_2 \cdot e^{-b.t} = \left(C_2 - b \cdot (C_1 + C_2 \cdot t) \right) \cdot e^{-b.t}$$

Tak dostaneme opět dvě rovnice, pro počáteční výchylku :

$$y_o = 1 = (C_1 + C_2 \cdot 0) \cdot e^{-b.0} = C_1$$

A pro počáteční rychlost :

$$v_o = 0 = \left(C_2 - b \cdot (C_1 + C_2 \cdot 0) \right) \cdot e^{-b.0} = C_2 - b \cdot C_1$$

Řešení těchto dvou rovnic je :

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = b \cdot C_1 = b$$

Konkrétní vztah pro výchylku, znázorněnou na obrázku, je tedy :

$$\boxed{y = (1 + b) \cdot e^{-b.t}}$$

Z obrázku vidíme, že zmenšení konstanty tlumení z původní již relativně dosti malé hodnoty $b = 10/8 \cdot \omega$ na hodnotu právě rovnou vlastní úhlové frekvenci , tj. $b = \omega$, skutečně vede k výrazně rychlejšímu poklesu výchylky.

Další zmenšení brzdicích sil by pak již způsobilo překmit výchylky na druhou stranu - a tedy by došlo ke vzniku kmitavého pohybu podle bodu 1).

(konec kapitoly) **K. Rusňák, verze 01/2005, rev. 04/2006,**

02/2008 – vzorová řešení pohybové rovnice pro všechny tři případy kmitů, určení integračních konstant, nové grafy, výpočet celkové energie oscilátoru, zavedení útlumu, log. dekrementu a kvality oscilátoru