Posloupnosti

1. Napište rekurentní i obecný předpis libovolné rostoucí aritmetické posloupnosti. Nakreslete její graf. [2 body]

2. Napište rekurentní i obecný předpis libovolné klesající aritmetické posloupnosti. Nakreslete její graf. [2 body]

3. Napište rekurentní i obecný předpis libovolné rostoucí geometrické posloupnosti. Nakreslete její graf. [2 body]

4. Napište rekurentní i obecný předpis libovolné klesající geometrické posloupnosti. Nakreslete její graf. [2 body]

5. Napište obecný předpis libovolné konvergentní rostoucí posloupnosti. Napište prvních pět členů nalezené posloupnosti a znázorněte je graficky. [2 body]

6. Napište obecný předpis libovolné konvergentní klesající posloupnosti. Napište prvních pět členů nalezené posloupnosti a znázorněte je graficky. [2 body]

7. Napište obecný předpis libovolné divergentní klesající posloupnosti. Napište prvních pět členů nalezené posloupnosti a znázorněte je graficky. [2 body]

8. Napište obecný předpis libovolné divergentní rostoucí posloupnosti. Napište prvních pět členů nalezené posloupnosti a znázorněte je graficky. [2 body]

9. Vypočtěte limity posloupností
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n + 4^n}{3^n - 4^n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{5n}\right)^n$. [2 body]

10. Vypočtěte limity posloupností
    a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$. [2 body]

11. Vypočtěte limity posloupností

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{5n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+1}}{n+2}$. [2 body]

12. Vypočtěte limity posloupností

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^{\frac{n}{4}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(3n^3+4)}{n^4+2}$. [2 body]

13. Vypočtěte limity posloupností

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{3n}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(3n+3)(3n-8)}{1-n^2+^3}$. [2 body]

14. Vypočtěte limity posloupností

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{\frac{n}{3}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4$. [2 body]

15. Zjistěte, zda dané posloupnosti jsou konvergentní, a určete jejich limity

(a) $\left\{\dfrac{4}{n}-\dfrac{3n}{n^2+1}\right\}$, [1 bod]

(b) $\left\{\dfrac{2^n+3}{1-4\cdot 2^n}\right\}$. [1 bod]

16. Zjistěte, zda dané posloupnosti jsou konvergentní, a určete jejich limity

(a) $\left\{\dfrac{(2n+1)(3n+3)(3n-8)}{1-n^2+n^3}\right\}$, [1 bod]

(b) $\left\{\dfrac{2^n-2^{-n}}{2^n+2^{-n}}\right\}$. [1 bod]

17. Zjistěte, zda dané posloupnosti jsou konvergentní, a určete jejich limity

(a) $\left\{\left(\dfrac{n^5+1}{2n^5+3n}\right)^4\right\}$, [1 bod]

(b) $\left\{\dfrac{5^n-5^{-n}}{5^n+5^{-n}}\right\}$. [1 bod]

18. Zjistěte, zda dané posloupnosti jsou konvergentní, a určete jejich limity

(a) $\left\{\dfrac{2n^2+1}{3-n^2}\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3n-1}{5n^2+4}\right)\right\}$, [1 bod]

(b) $\left\{\sqrt{(n+1)}-\sqrt{n}\right\}$. [1 bod]

19. Je dána posloupnost
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right).$$
Napište předpis pro n-tý člen posloupnosti a vypočtěte limitu této posloupnosti. [2 body]

20. Je dána posloupnost
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right).$$
Napište předpis pro n-tý člen posloupnosti a vypočtěte limitu této posloupnosti. [2 body]

21. Je dána posloupnost
$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right).$$
Napište předpis pro n-tý člen posloupnosti a vypočtěte limitu této posloupnosti. [2 body]

22. Je dána posloupnost $a_n = \frac{n}{n+1}$.
    (a) Ukažte, že daná posloupnost je rostoucí. [1 bod]
    (b) Ukažte, že daná posloupnost je omezená. [1 bod]

23. Je dána posloupnost $a_n = \frac{n+1}{n}$.
    (a) Ukažte, že daná posloupnost je klesající. [1 bod]
    (b) Ukažte, že daná posloupnost je omezená. [1 bod]

24. Je dána posloupnost $a_n = \frac{n-1}{n}$.
    (a) Ukažte, že daná posloupnost je klesající. [1 bod]
    (b) Ukažte, že daná posloupnost je omezená. [1 bod]

25. Je dána posloupnost $a_n = \frac{n}{n+3}$.
    (a) Ukažte, že daná posloupnost je rostoucí. [1 bod]

(b) Ukažte, že daná posloupnost je omezená. [1 bod]

26. Je dána posloupnost reálných čísel vztahem pro n-tý člen

$$a_n = \frac{1}{n^3} - 5.$$

(a) Ukažte, že daná posloupnost je monotónní. [1 bod]

(b) Ukažte, že daná posloupnost je omezená, a určete její supremum a infimum. [1 bod]

27. Je dána posloupnost reálných čísel vztahem pro n-tý člen

$$a_n = 2 - \frac{1}{n^2}.$$

(a) Ukažte, že daná posloupnost je monotónní. [1 bod]

(b) Ukažte, že daná posloupnost je omezená, a určete její supremum a infimum. [1 bod]

28. Je dána posloupnost reálných čísel vztahem pro n-tý člen

$$a_n = 4 - \frac{1}{2n^2}.$$

(a) Ukažte, že daná posloupnost je monotónní. [1 bod]

(b) Ukažte, že daná posloupnost je omezená, a určete její supremum a infimum. [1 bod]

29. Je dána posloupnost reálných čísel vztahem pro n-tý člen

$$a_n = 3 + \frac{2}{n^2}.$$

(a) Ukažte, že daná posloupnost je monotónní. [1 bod]

(b) Ukažte, že daná posloupnost je omezená, a určete její supremum a infimum. [1 bod]

30. Posloupnost je dána výčtem svých členů: $\left\{64, 16, 4, 1, \frac{1}{4}, \dots\right\}$.

a) Rozhodněte, zda daná posloupnost je aritmetická nebo geometrická a určete její diferenci, případně kvocient.
b) Napište vzorec pro n-tý člen této posloupnosti (obecný předpis posloupnosti).
c) Rozhodněte o monotónii této posloupnosti. Svoje tvrzení zdůvodněte.
d) Vypočtěte limitu této posloupnosti.

[5 bodů]

31. Posloupnost je dána výčtem svých členů: $\{32, 16, 8, 4, 2, \ldots\}$.

a) Rozhodněte, zda daná posloupnost je aritmetická nebo geometrická a určete její diferenci, případně kvocient.
b) Napište vzorec pro n-tý člen této posloupnosti (obecný předpis posloupnosti).
c) Rozhodněte o monotónii této posloupnosti. Svoje tvrzení zdůvodněte.
d) Vypočtěte limitu této posloupnosti.

[5 bodů]

32. Posloupnost je dána výčtem svých členů: $\left\{125, 25, 5, 1, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$.

(a) Rozhodněte, zda daná posloupnost je aritmetická nebo geometrická a určete její diferenci, případně kvocient.
(b) Napište vzorec pro n-tý člen této posloupnosti (obecný předpis poslounposti).
(c) Rozhodněte o monmotonii této posloupnosti. Svoje tvrzení zdůvodněte.
(d) Vypočtěte limitu této posloupnosti.

[5 bodů]

33. Posloupnost je dána výčtem svých členů: $\left\{81, 27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$.

(a) Rozhodněte, zda daná posloupnost je aritmetická nebo geometrická a určete její diferenci, případně kvocient.

(b) Napište vzorec pro n-tý člen této posloupnosti (obecný předpis poslounposti).

(c) Rozhodněte o monmotonii této posloupnosti. Svoje tvrzení zdůvodněte.

(d) Vypočtěte limitu této posloupnosti.

[5 bodů]

Funkce

1. Vypočtěte limity funkcí (bez použití l'Hospitalova pravidla)

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$, [1 bod]

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \arcsin \dfrac{1-x}{1+x}$. [1 bod]

2. Vypočtěte limity funkcí (bez použití l'Hospitalova pravidla)

   a) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$, [1 bod]

   b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \arccos \dfrac{1+x}{1-x}$. [1 bod]

3. Vypočtěte limity funkcí (bez použití l'Hospitalova pravidla)

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

   [2 body]

4. Vypočtěte limity funkcí (bez použití l'Hospitalova pravidla)

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$, b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{2x+1} + \dfrac{x^3+4x^2-2}{1-2x^2} \right)$.

   [2 body]

5. Vypočtěte limity funkcí (bez použití l'Hospitalova pravidla)

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, [1 bod]

6. Bez použití l'Hospitalova pravidla vypočtěte

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}$, [1 bod]

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$. [1 bod]

7. Bez použití l'Hospitalova pravidla vypočtěte

   (a) $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, [1 bod]

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\log \dfrac{100+x^2}{1+100x^2} \right)$. [1 bod]

8. Bez použití l'Hospitalova pravidla vypočtěte

(a) $\lim\limits_{x\to 1+} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}$, [1 bod]

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$. [1 bod]

9. Bez použití l'Hospitalova pravidla vypočtěte

   (a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, [1 bod]

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$. [1 bod]

10. Bez použití l'Hospitalova pravidla vypočtěte

   (a) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$, [1 bod]

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$. [1 bod]

11. Bez použití l'Hospitalova pravidla vypočtěte

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x)$, [1 bod]

   (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$. [1 bod]

12. Vypočtěte limity

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$, [1 bod]

   (b) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$. [1 bod]

13. Vypočtěte limity

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x}}{\ln x}$, [1 bod]

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3}{x^2-x-2}\right)$. [1 bod]

14. Uveďte příklady pěti funkcí $f(x)$, pro něž je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Nakreslete jejich graf. [2 body]

15. Uveďte příklady pěti funkcí $f(x)$, pro něž je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Nakreslete jejich graf. [2 body]

16. Uveďte příklady pěti funkcí $f(x)$, pro něž je $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Nakreslete jejich graf. [2 body]

17. Uveďte příklady pěti funkcí $f(x)$, pro něž je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Nakreslete jejich graf. [2 body]

18. Je dána funkce $f: \ y = x^2 - 6x,\ x \in (-\infty, 3)$. Najděte inverzní funkci k funkci f. Načrtněte graf funkce f a graf inverzní funkce. [2 body]

19. Je dána funkce $f: \ y = 2\cos 3x,\ x \in < 0, \frac{\pi}{3} >$. Najděte inverzní funkci k funkci f.

20. Je dána funkce $f: \ y = x^2 - 4x,\ x \in (-\infty, 2)$. Najděte inverzní funkci k funkci f. Načrtněte graf funkce f a graf inverzní funkce. [2 body]

21. Je dána funkce $f: \ y = x^2 + 4x,\ x \in (-\infty, -2)$. Najděte inverzní funkci k funkci f. Načrtněte graf funkce f a graf inverzní funkce. [2 body]

22. Je dána funkce $f: \ y = x^2 + 2x,\ x \in (-\infty, -1)$. Najděte inverzní funkci k funkci f. Načrtněte graf funkce f a graf inverzní funkce. [2 body]

23. Je dána funkce $f: \ y = 3\sin 2x,\ x \in < -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} >$. Najděte inverzní funkci k funkci f.

24. Je dána funkce $f: \ y = 2\cos 3x,\ x \in < 0, \frac{\pi}{3} >$. Najděte inverzní funkci k funkci f.

25. Najděte inverzní funkci k funkci $f: y = x^2 - 2x,\ D(f) = (-\infty, 1)$. [2 body]

26. Najděte inverzní funkci k funkci $f: y = \frac{1-x}{1+x},$. [2 body]

27. Najděte inverzní funkci k funkci $f: y = 2\sin 3x,\ D(f) =< -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} >$. [2 body]

28. Najděte inverzní funkci k funkci $f: y = 1 + \log(x+2)$. [2 body]

29. Najděte inverzní funkci k funkci $f: y = e^{x-1} - 2$. [2 body]

30. Najděte body nespojitosti funkce $f: \quad y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-x}$ a určete jejich charakter. [2 body]

31. Najděte body nespojitosti funkce $f: \quad y = \dfrac{x}{(1+x)^2}$ a určete jejich charakter.

    [2 body]

32. Najděte body nespojitosti funkce $f: \ y = e^{-\frac{1}{x}}$ a určete jejich charakter. [2 body]

33. Najděte body nespojitosti funkce $f: \quad y = \sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ a určete jejich charakter. [2 body]

34. Jsou dány funkce $f(x) = \frac{x^2}{3}$, $g(x) = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

    a) Nakreslete grafy funkcí f a g.

    b) Vypočtěte průsečíky grafů funkcí f a g.

    c) Vypočtěte velikost plochy ohraničené grafy funkcí f a g.

    [5 bodů]

35. Jsou dány funkce $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $g(x) = 5 - \frac{1}{2}x^2$.

    a) Nakreslete grafy funkcí f a g.

    b) Vypočtěte průsečíky grafů funkcí f a g.

    c) Vypočtěte velikost plochy ohraničené grafy funkcí f a g.

    [5 bodů]

36. Jsou dány funkce $f(x) = \frac{3x^2}{5}$, $g(x) = 2 - \frac{2}{5}x^2$.

a) Nakreslete grafy funkcí f a g.
b) Vypočtěte průsečíky grafů funkcí f a g.
c) Vypočtěte velikost plochy ohraničené grafy funkcí f a g.

[5 bodů]

37. Jsou dány funkce $f(x) = \frac{2x^2}{3}$, $g(x) = 4 - \frac{3}{5}x^2$.

a) Nakreslete grafy funkcí f a g.
b) Vypočtěte průsečíky grafů funkcí f a g.
c) Vypočtěte velikost plochy ohraničené grafy funkcí f a g.

[5 bodů]

38. Jsou dány funkce $f(x) = 1 - \frac{x^2}{3}$ a $g(x) = \frac{x^2}{3} - 1$.

(a) Nakreslete grafy funkcí f a g.
(b) Určete souřadnice průsečíků grafů funkcí f a g.
(c) Vypočtěte velikost plochy, kterou ohraničují grafy funkcí f a g.

[5 bodů]

39. Jsou dány funkce $f(x) = 1 - \frac{x^2}{5}$ a $g(x) = \frac{x^2}{5} - 1$.

(a) Nakreslete grafy funkcí f a g.
(b) Určete souřadnice průsečíků grafů funkcí f a g.
(c) Vypočtěte velikost plochy, kterou ohraničují grafy funkcí f a g.

[5 bodů]

40. Jsou dány funkce $f(x) = 2 - \frac{x^2}{4}$ a $g(x) = \frac{x^2}{4} - 2$.

(a) Nakreslete grafy funkcí f a g.
(b) Určete souřadnice průsečíků grafů funkcí f a g.

(c) Vypočtěte velikost plochy, kterou ohraničují grafy funkcí f a g.

[5 bodů]

41. Jsou dány funkce $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 1$ a $g(x) = -1 + \frac{x^2}{4}$.

    (a) Nakreslete grafy funkcí f a g.

    (b) Určete souřadnice průsečíků grafů funkcí f a g.

    (c) Vypočtěte velikost plochy, kterou ohraničují grafy funkcí f a g.

[5 bodů]

42. Jsou dány funkce $f(x) = \frac{x^2}{5}$, $g(x) = 3 - \frac{4}{5}x^2$.

    a) Nakreslete grafy funkcí f a g.

    b) Vypočtěte průsečíky grafů funkcí f a g.

    c) Vypočtěte velikost plochy ohraničené grafy funkcí f a g.

[5 bodů]

43. Jsou dány funkce $f(x) = \frac{x^2}{7}$, $g(x) = 2 - \frac{6}{7}x^2$.

    a) Nakreslete grafy funkcí f a g.

    b) Vypočtěte průsečíky grafů funkcí f a g.

    c) Vypočtěte velikost plochy ohraničené grafy funkcí f a g.

[5 bodů]

Derivace

1. Zjistěte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f\colon y = \sin x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Nakreslete obrázek. [2 body]

2. Zjistěte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f\colon y = \cos x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Nakreslete obrázek. [2 body]

3. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = -x^2 + 3$, která je rovnoběžná s přímkou $y = 2x + 3$. Nakreslete obrázek. [2 body]

4. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = -x^2 + 3$, která je kolmá k přímce $y = 2x + 3$. Nakreslete obrázek. [2 body]

5. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = -\frac{x^2}{2} + 3$, která je kolmá na přímku $y = 2x + 3$. Nakreslete obrázek. [2 body]

6. Napište rovnici tečny ke grafu funkce $y = -\frac{x^2}{3} + 1$, která je kolmá na přímku $y = 2x - 1$. Nakreslete obrázek. [2 body]

7. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2+1}{2}$. Napište rovnici tečny, která je kolmá k přímce $y = -2x$. Nakreslete obrázek. [2 body]

8. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2-2}{3}$. Napište rovnici tečny, která je kolmá k přímce $y = -2x$. Nakreslete obrázek. [2 body]

9. Je dána funkce $f(x) = \frac{-x^2+1}{2}$. Napište rovnici tečny, která je kolmá k přímce $y = -\frac{1}{2}x$. Nakreslete obrázek. [2 body]

10. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{5}$. Napište rovnici tečny, která je kolmá k přímce $y = -2x$. Nakreslete obrázek. [2 body]

11. Je dána funkce $f(x) = \frac{-x^2+1}{2}$. Napište rovnici tečny, která je kolmá k přímce $y = \frac{1}{2}x + 3$. Nakreslete obrázek. [2 body]

12. Zjistěte rovnice tečny a normály ke grafu funkce $f\colon y = \operatorname{arctg} x$ v bodě $x_0 = 1$. Nakreslete obrázek. [2 body]

13. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ v bodě $x_0 = 1$. Načrtněte graf funkce $f(x)$ i vypočtenou tečnu a normálu.

14. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = e^{2x}$ v bodě $x_0 = 0$. Načrtněte graf funkce $f(x)$ i vypočtenou tečnu a normálu.

15. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ v bodě $x_0 = 0$. Načrtněte graf funkce $f(x)$ a nalezenou tečnu a normálu. [2 body]

16. Zjistěte rovnice tečny a normály ke grafu funkce f: $y = \operatorname{tg} x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Nakreslete obrázek. [2 body]

17. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce zadané parametricky rovnicemi $x = \cos t,\ \ y = \sin t$, $t \in< 0, \pi >$. Načrtněte obrázek. [2 body]

18. Ukažte, že funkce $y = 2x + \cos x + \sin x$ vyhovuje rovnici $y'' + y = 2x$. [2 body]

19. Ukažte, že funkce $y = \frac{1}{2}e^x + \sin x$ vyhovuje diferenciální rovnici $y'' + y = e^x$. [2 body]

20. Ukažte, že funkce $y = \frac{1}{2}e^x + \cos x$ vyhovuje diferenciální rovnici $y'' + y = e^x$. [2 body]

21. Ukažte, že funkce $y = xe^{-x}$ vyhovuje rovnici $xy' = (1 - x)y$. [2 body]

22. Ukažte, že funkce $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ vyhovuje rovnici $xy' = (1 - x^2)y$. [2 body]

23. Ukažte, že funkce $y = \ln \dfrac{1}{1+x}$ vyhovuje rovnici $xy' + 1 = e^y$. [2 body]

24. Ukažte, že funkce $y = e^{-x} + 2x - 2$ vyhovuje rovnici $y' + y = 2x$. [2 body]

25. Ukažte, že funkce $y = -\dfrac{x}{2} - \cos x - \sin x$ vyhovuje rovnici $y'' + y = -\frac{x}{2}$. [2 body]

26. Ukažte, že funkce $y = \dfrac{x}{3} - \cos x - \sin x$ vyhovuje rovnici $y'' + y = \frac{x}{3}$. [2 body]

27. Vypočtěte $f''(0)$, je-li $f(x) = e^x \cos x$. [2 body]

28. Vypočtěte $f''(0)$, je-li $f(x) = e^x \sin x$. [2 body]

29. Vypočtěte $f''(0)$, je-li $f(x) = e^{-x} \sin x$. [2 body]

30. Vypočtěte $f''(0)$, je-li $f(x) = e^{-x} \cos x$. [2 body]

31. Je dána funkce $f(x) = e^{2x} \cos x$. Vypočtěte $f''(0)$.

32. Vypočtěte $f''(0)$ pro funkci $f(x) = e^{-x} \cos \frac{x}{2}$. [2 body]

33. Vypočtěte $f''(0)$ pro funkci $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cos 3x$. [2 body]

34. Vypočtěte $f''(0)$ pro funkci $f(x) = e^{-2x} \cos \frac{x}{3}$. [2 body]

35. Vypočtěte $f''(0)$ pro funkci $f(x) = e^{\frac{x}{3}} \cos 3x$. [2 body]

36. Vypočtěte $f''(0)$ pro funkci $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$, kde A, ω, φ jsou konstanty. [2 body]

37. Vypočtěte $f''(0)$ pro funkci $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, kde A, ω, φ jsou konstanty. [2 body]

38. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$. Vypočtěte $f''(0)$. [2 body]

39. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$. Vypočtěte $f''(0)$. [2 body]

40. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3}$. Vypočtěte $f''(0)$. [2 body]

41. Je dána funkce $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$. Vypočtěte $f''(0)$. [2 body]

42. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$. [1 bod]

43. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x^2}$. [1 bod]

44. Určete definiční obor a hodnotu $f'(0)$ pro funkci $f(x) = (\sqrt{x+1})^{\cos \pi x}$. [2 body]

45. Určete definiční obor a hodnotu $f'(1)$ pro funkci $f(x) = (\sqrt{x})^{\sin \frac{\pi x}{2}}$. [2 body]

46. Určete definiční obor a hodnotu $f'(1)$ pro funkci $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. [2 body]

47. Určete definiční obor a hodnotu $f'(1)$ pro funkci $f(x) = x^{\sin x}$. [2 body]

48. Je dána funkce $f(x) = \left(2 - \frac{x^2}{3}\right)\cos x$. Vypočtěte $f''(0)$. [2 body]

49. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2+3x}{2}\sin x$. Vypočtěte $f''(0)$. [2 body]

50. Je dána funkce $f(x) = \frac{4-x^2}{3}\cos x$. Vypočtěte $f''(0)$. [2 body]

51. Je dána funkce $f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\sin x$. Vypočtěte $f''(0)$. [2 body]

52. Vypočtěte derivaci funkce $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$. [1 bod]

53. Užitím l'Hospitalova pravidla vypočtěte

    (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$. [1 bod]

    (b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$. [1 bod]

    (c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln^2(x+1)}{(x+1)^2}$ [1 bod]

    (d) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2\ln x$. [1 bod]

    (e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. [1 bod]

    (f) $\lim\limits_{x\to 0+} x^2\ln x$. [1 bod]

    (g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$ [1 bod]

    (h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}$. [1 bod]

    (i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$. [1 bod]

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$. [1 bod]

(k) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ [1 bod]

(l) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$, [1 bod]

(m) $\lim\limits_{x\to1-}[\ln x\ln(1-x)]$. [1 bod]

(n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{\ln x}$, [1 bod]

(o) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. [1 bod]

54. Jsou dány křivky $y=x^2$ a $y=\sqrt{x}$.

    (a) Načrtněte obě křivky a vypočtěte souřadnice jejich průsečíku. [1 bod]

    (b) Pod jakým úhlem φ se protínají obě křivky? Stačí vypočítat $\operatorname{tg}\varphi$. [1 bod]

55. Jsou dány křivky $y=x^2$ a $y=\frac{x}{2}$.

    (a) Načrtněte obě křivky a vypočtěte souřadnice jejich průsečíků. [1 bod]

    (b) Pod jakým úhlem φ se protínají obě křivky v obou průsečích? Stačí vypočítat $\operatorname{tg}\varphi$. [1 bod]

56. Jsou dány křivky $y=x^2$ a $y=\frac{3x}{2}$.

    (a) Načrtněte obě křivky a vypočtěte souřadnice jejich průsečíků. [1 bod]

    (b) Pod jakým úhlem φ se protínají obě křivky v obou průsečících? Stačí vypočítat $\operatorname{tg}\varphi$. [1 bod]

57. Jsou dány křivky $y=x^2$ a $y=3x$.

    (a) Načrtněte obě křivky a vypočtěte souřadnice jejich průsečíků. [1 bod]

    (b) Pod jakým úhlem φ se protínají obě křivky v obou průsečích? Stačí vypočítat $\operatorname{tg}\varphi$. [1 bod]

58. Pod jakým úhlem protíná graf funkce $y = \operatorname{arctg} x$ osu x? [2 body]

59. Pod jakým úhlem protíná graf funkce $y = \arcsin x$ osu x? [2 body]

60. Jsou dány křivky $y = \sin x$ a $y = \cos x$, $x \in (0, \pi)$.

    (a) Načrtněte obě křivky a vypočtěte souřadnice jejich průsečíku. [1 bod]

    (b) Pod jakým úhlem φ se protínají obě křivky? Stačí vypočítat $\operatorname{tg} \varphi$. [1 bod]

61. Je dána funkce $f(x) = 4 - (x - 1)^2$.

    a) Určete definiční obor funkce f. Načrtněte graf funkcí $f(x)$ a $g(x) = |f(x)|$.

    b) Vypočtěte $f'(2)$, $g'(2)$, $f'(4)$, $g'(4)$.

    c) Vypočtěte $f'(3)$ a $g'(3)$.

    d) Napište rovnici tečny a normály ke grafu fun kce f v bodě $x_0 = 2$. Znázorněte graficky.

    [5 bodů]

62. Je dána funkce $f(x) = 4 - (x + 1)^2$.

    a) Určete definiční obor funkce f. Načrtněte graf funkcí $f(x)$ a $g(x) = |f(x)|$.

    b) Vypočtěte $f'(2)$, $g'(2)$, $f'(4)$, $g'(4)$.

    c) Vypočtěte $f'(3)$ a $g'(3)$.

    d) Napište rovnici tečny a normály ke grafu fun kce f v bodě $x_0 = 2$. Znázorněte graficky.

    [5 bodů]

63. Je dána funkce $y = f(x)$ parametricky rovnicemi $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ t \in <0, \pi>$.

a) Nakreslete graf funkce $y = f(x)$.

b) Vyšetřete monotonii funkce $y = f(x)$.

c) Vyšetřete konvexitu a konkavitu funkce $y = f(x)$.

d) Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Znázorněte graficky.

[5 bodů]

64. Je dána funkce $y = f(x)$ parametricky rovnicemi $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in < 0, \pi >$.

    a) Nakreslete graf funkce $y = f(x)$.

    b) Vyšetřete monotonii funkce $y = f(x)$.

    c) Vyšetřete konvexitu a konkavitu funkce $y = f(x)$.

    d) Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Znázorněte graficky.

[5 bodů]

65. Je dána funkce $y = f(x)$ parametricky rovnicemi $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in < 0, \pi >$.

    a) Nakreslete graf funkce $y = f(x)$.

    b) Vyšetřete monotonii funkce $y = f(x)$.

    c) Vyšetřete konvexitu a konkavitu funkce $y = f(x)$.

    d) Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Znázorněte graficky.

[5 bodů]

66. Je dána funkce $y = f(x)$ parametricky rovnicemi $x = \cos t,\ y = 3\sin t,\ t \in < 0, \pi >$.

    a) Nakreslete graf funkce $y = f(x)$.

b) Vyšetřete monotonii funkce $y = f(x)$.

c) Vyšetřete konvexitu a konkavitu funkce $y = f(x)$.

d) Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $t_0 = \frac{\pi}{4}$. Znázorněte graficky.

[5 bodů]

67. Pro funkci $f\colon y = (x+3)^{\frac{1}{x+3}}$ určete

a) definiční obor $D(f)$,

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -3+} f(x)$,

c) derivaci $f'(x)$ a její definiční obor $D(f')$.

d) Vyslovte definici derivace funkce g v bodě x_0. Pomocí ní vypočtěte derivaci funkce $g(x) = (x+3)^2$ v bodě $x_0 = 1$.

[5 bodů]

68. Pro funkci $f\colon y = x^{\frac{1}{x}}$ určete

a) definiční obor $D(f)$,

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$,

c) derivaci $f'(x)$ a její definiční obor $D(f')$.

d) Vyslovte definici derivace funkce g v bodě x_0. Pomocí ní vypočtěte derivaci funkce $g(x) = \dfrac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 1$.

[5 bodů]

69. Pro funkci $f\colon y = x^{\frac{2}{x}}$ určete

a) definiční obor $D(f)$,

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$,

c) derivaci $f'(x)$ a její definiční obor $D(f')$.

d) Vyslovte definici derivace funkce g v bodě x_0. Pomocí ní vypočtěte derivaci funkce $g(x) = \frac{2}{x}$ v bodě $x_0 = 1$.

[5 bodů]

70. Je dána funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 4 - (x+1)^2$.

a) Načrtněte grafy funkcí $f(x)$ a $g(x) = |f(x)|$, vypočtěte $f'(1)$ a $g'(1)$ (popř. jednostranné).

b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[0, f(0)]$.

c) Ověřte, zda funkce $f(x)$ splňuje na intervalu $< a, b >$ (kde $a = -2, b = 2$) podmínky Lagrangeovy věty (jedna z vět o střední hodnotě diferenciálního počtu). Ověření proveďte také pro funkci $|f(x)|$ na stejném intervalu.

d) Najděte $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \ .$$

Načrtněte tečnu ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[\xi, f(\xi)]$.

[5 bodů]

71. Je dána funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 4 - (x-1)^2$.

a) Načrtněte grafy funkcí $f(x)$ a $g(x) = |f(x)|$, vypočtěte $f'(3)$ a $g'(3)$ (popř. jednostranné).

b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[0, f(0)]$.

c) Ověřte, zda funkce $f(x)$ splňuje na intervalu $< a, b >$ (kde $a = 0, b = 4$) podmínky Lagrangeovy věty (jedna z vět o střední hodnotě diferenciálního počtu). Ověření proveďte také pro funkci $|f(x)|$ na stejném intervalu.

d) Najděte $\xi \in (a, b)$ takové, že

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \ .$$

Načrtněte tečnu ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[\xi, f(\xi)]$.

[5 bodů]

72. Je dána funkce $f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

    a) Určete $D(f)$. Nakreslete grafy funkcí $f(x)$ a $g(x) = |f(x)|$ na intervalu $< 0, 5\pi >$.
    b) Posuďte periodičnost funkce f a svoje závěry zdůvodněte.
    c) Vypočtěte $f'(\pi)$ a $g'(\pi)$. Platí $f'(\pi) = g'(\pi)$?
    d) Vyslovte definici derivace a pomocí ní ověřte vypočtenou hodnotu $f'(\pi)$.

[5 bodů]

73. Je dána funkce $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

    a) Určete $D(f)$. Nakreslete grafy funkcí $f(x)$ a $g(x) = |f(x)|$ na intervalu $< 0, 5\pi >$.
    b) Posuďte periodičnost funkce f a svoje závěry zdůvodněte.
    c) Vypočtěte $f'(2\pi)$ a $g'(2\pi)$. Platí $f'(2\pi) = g'(2\pi)$?
    d) Vyslovte definici derivace a pomocí ní ověřte vypočtenou hodnotu $f'(2\pi)$.

[5 bodů]

74. Je dána funkce $f(x) = \cos 2x$.

    a) Určete $D(f)$. Nakreslete grafy funkcí $f(x)$ a $g(x) = |f(x)|$ na intervalu $< 0, 2\pi >$.
    b) Posuďte periodičnost funkce f a svoje závěry zdůvodněte.
    c) Vypočtěte $f'(\frac{\pi}{4})$ a $g'(\frac{\pi}{4})$. Platí $f'(\frac{\pi}{4}) = g'(\frac{\pi}{4})$?
    d) Vyslovte definici derivace a pomocí ní ověřte vypočtenou hodnotu $f'(\frac{\pi}{4})$.

[5 bodů]

75. Je dána funkce $f(x) = \cos 4x$.

a) Určete $D(f)$. Nakreslete grafy funkcí $f(x)$ a $g(x) = |f(x)|$ na intervalu $< 0, \pi >$.

b) Posuďte periodičnost funkce f a svoje závěry zdůvodněte.

c) Vypočtěte $f'(\frac{\pi}{8})$ a $g'(\frac{\pi}{8})$. Platí $f'(\frac{\pi}{8}) = g'(\frac{\pi}{8})$?

d) Vyslovte definici derivace a pomocí ní vypočtěte $f'(\frac{\pi}{8})$.

[5 bodů]

76. Je dána funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 4 - (x+1)^2$.

a) Načrtněte grafy funkcí $f(x)$ a $g(x) = |f(x)|$, vypočtěte $f'(1)$ a $g'(1)$ (popř. jednostranné).

b) Napište rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[0, f(0)]$.

c) Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafem funkce f a osou x (pro $y \geq 0$).

[5 bodů]

Průběh funkce

1. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x) = x^2 + 5x + 6, x \in < -4, 0 >$. [2 body]

2. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 5x + 6,\ \ x \in < 1, 4 >$. [2 body]

3. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x) = x^2 + 5x + 6$, $x \in < -4, 1 >$. [2 body]

4. Určete lokální extrémy funkce f: $y = \dfrac{x^2}{x+3}$. [2 body]

5. Určete lokální extrémy funkce f: $y = \dfrac{x^2}{x-2}$. [2 body]

6. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 5x + 6,\ \ x \in < 0, 4 >$. [2 body]

7. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $x \in < -4, 0 >$. [2 body]

8. Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$, $x \in < 0, 4 >$. [2 body]

9. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $< -3, 10 >$. [2 body]

10. Určete lokální extrémy funkce f: $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)$. [2 body]

11. Určete lokální extrémy funkce f: $y = \dfrac{x}{x^2+3}$. [2 body]

12. Určete lokální extrémy funkce f: $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$. [2 body]

13. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ na intervalu $< \frac{3}{2}, 5 >$. [2 body]

14. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ na intervalu $< -\frac{1}{2}, 4 >$. [2 body]

15. Určete body, v nichž funkce $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 17$ nabývá svých absolutních extrémů na intervalu $\langle -2, 2\rangle$. [2 body]

16. Určete body, v nichž funkce $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ nabývá svých absolutních extrémů na intervalu $\langle -2, 1\rangle$. [2 body]

17. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$ na intervalu $\langle 0, 3\rangle$. [2 body]

18. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ na intervalu $\langle -2, 2\rangle$. [2 body]

19. Je dána funkce $f: \ y = \frac{e^x}{x}$. Určete $D(f)$ a extrémy funkce f na $D(f)$. [2 body]

20. Je dána funkce $f: \ y = \frac{x}{e^x}$. Určete $D(f)$ a extrémy funkce f na $D(f)$. [2 body]

21. Je dána funkce $f: \ y = \frac{\ln x}{x}$. Určete $D(f)$ a extrémy funkce f na $D(f)$. [2 body]

22. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $< -3, 10 >$.
[2 body]

23. Najděte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ na intervalu $< -1, 1 >$. [2 body]

24. Je dána funkce $f: \ y = x \ln x$. Určete $D(f)$ a extrémy funkce f na $D(f)$. [2 body]

25. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x) = x + \operatorname{arccotg} x$
a) konvexní, b) konkávní. [2 body]

26. Vyšetřete konvexitu a konkávitu funkce $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$. [2 body]

27. Vyšetřete konvexitu a konkávitu funkce $f(x) = \frac{x^2}{x^2-3}$. [2 body]

28. Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$
a) konvexní, b) konkávní. [2 body]

29. Určete všechny asymptoty grafu funkce f: $y = x + 2\,\mathrm{arctg}\,x$ a načrtněte graf funkce v jejich blízkosti. [3 body]

30. Určete všechny asymptoty grafu funkce f: $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x}$ a načrtněte graf funkce v jejich blízkosti. [3 body]

31. Určete všechny asymptoty grafu funkce f: $y = e^{\frac{1}{x}}$ a načrtněte graf funkce v jejich blízkosti. [3 body]

32. Určete všechny asymptoty grafu funkce f: $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 9}$ a načrtněte graf funkce v jejich blízkosti. [3 body]

33. Vyšetřete všechny asymptoty funkce $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$. [2 body]

34. Vyšetřete všechny asymptoty funkce $y = \frac{x^3+2}{x^2-4}$. [2 body]

35. Vyšetřete všechny asymptoty funkce $y = \frac{x^2+1}{1-x}$. [2 body]

36. Vyšetřete všechny asymptoty funkce $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$. [2 body]

37. Je dána funkce $f :\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.

    a) Určete D a vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.
    b) Určete $f'(x)$ na D a stacionární body funkce f.
    c) Stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.
    d) Stanovte intervaly konvexity a konkávity funkce f.
    e) Určete všechny asymptoty funkce $f(x)$.
    e) Načrtněte graf funkce f.

[5 bodů]

38. Je dána funkce $f :\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$.

    a) Určete D a vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.
    b) Určete $f'(x)$ na D a stacionární body funkce f.

c) Stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.
d) Stanovte intervaly konvexity a konkávity funkce f.
e) Určete všechny asymptoty funkce $f(x)$.
e) Načrtněte graf funkce f.

[5 bodů]

39. Je dána funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

a) Určete definiční obor funkce, body nespojitosti funkce f a jejich typ.
b) Vyšetřete monotonii funkce.
c) Určete intervaly konvexity a konkávity.
d) Určete všechny asymptoty funkce f.
e) Vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.
f) Nakreslete graf funkce f.

[5 bodů]

40. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

a) Určete definiční obor funkce, body nespojitosti funkce f a jejich typ.
b) Vyšetřete monotonii funkce.
c) Určete intervaly konvexity a konkávity.
d) Určete všechny asymptoty funkce f.
e) Vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.
f) Nakreslete graf funkce f.

[5 bodů]

41. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

a) Určete definiční obor funkce, body nespojitosti funkce f a jejich typ.
b) Vyšetřete monotonii funkce.
c) Určete intervaly konvexity a konkávity.
d) Určete všechny asymptoty funkce f.
e) Vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.
f) Nakreslete graf funkce f.

42. Je dána funkce $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

a) Určete definiční obor funkce, body nespojitosti funkce f a jejich typ.
b) Vyšetřete monotonii funkce.
c) Určete intervaly konvexity a konkávity.
d) Určete všechny asymptoty funkce f.
e) Vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.
f) Nakreslete graf funkce f.

43. Je dána funkce $f(x) = -\frac{3x}{x^2+1}$.

a) Určete definiční obor funkce, body nespojitosti funkce f a jejich typ.
b) Vyšetřete monotonii funkce.
c) Určete intervaly konvexity a konkávity.
d) Určete všechny asymptoty funkce f.
e) Vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.
f) Nakreslete graf funkce f.

[5 bodů]

44. Je dána funkce $f:\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = e^{2x-x^2}$.

a) Určete D a vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.

b) Určete $f'(x)$ na D a stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.

d) Určete $f''(x)$ na D a stanovte intervaly konvexity a konkávity funkce f.

e) Určete všechny asymptoty funkce $f(x)$.

e) Načrtněte graf funkce f.

[5 bodů]

45. Je dána funkce $f:\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

a) Určete D a vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.

b) Určete $f'(x)$ na D a stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.

d) Určete $f''(x)$ na D a stanovte intervaly konvexity a konkávity funkce f.

e) Určete všechny asymptoty funkce $f(x)$.

e) Načrtněte graf funkce f.

[5 bodů]

46. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

(a) Určete definiční obor a intervaly spojitosti funkce f.

(b) Vypočtěte f' a určete intervaly monotonie funkce f.

(c) Vypočtěte f'' a určete intervaly konvexity a konkávity funkce f.

(d) Určete inflexní body funkce f.

(e) Zjistěte všechny asymptoty funkce f.

(f) Nakreslete graf funkce f.

[5 bodů]

47. Je dána funkce $f(x) = 1 + x + \frac{1}{x}$.

(a) Určete definiční obor a intervaly spojitosti funkce f.

(b) Vypočtěte f' a určete intervaly monotonie funkce f.

(c) Vypočtěte f'' a určete intervaly konvexity a konkávity funkce f.

(d) Určete inflexní body funkce f.

(e) Zjistěte všechny asymptoty funkce f.

(f) Nakreslete graf funkce f.

[5 bodů]

48. Je dána funkce $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$.

    (a) Určete definiční obor a intervaly spojitosti funkce f.

    (b) Vypočtěte f' a určete intervaly monotonie funkce f.

    (c) Vypočtěte f'' a určete intervaly konvexity a konkávity funkce f.

    (d) Určete inflexní body funkce f.

    (e) Zjistěte všechny asymptoty funkce f.

    (f) Nakreslete graf funkce f.

[5 bodů]

49. Je dána funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

    (a) Určete definiční obor a intervaly spojitosti funkce f.

    (b) Vypočtěte f' a určete intervaly monotonie funkce f.

    (c) Vypočtěte f'' a určete intervaly konvexity a konkávity funkce f.

    (d) Určete inflexní body funkce f.

    (e) Zjistěte všechny asymptoty funkce f.

    (f) Nakreslete graf funkce f.

[5 bodů]

50. Je dána funkce $f:\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} x$.

a) Určete D a vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.

b) Určete $f'(x)$ na D a stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.

d) Určete $f''(x)$ na D a stanovte intervaly konvexity a konkávity funkce f.

e) Určete všechny asymptoty funkce $f(x)$.

e) Načrtněte graf funkce f.

[5 bodů]

51. Je dána funkce $f:\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x^2 \ln x$.

a) Určete D a vypočtěte limity v krajních bodech definičního oboru.

b) Určete $f'(x)$ na D a stacionární body funkce f.

c) Stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.

d) Stanovte intervaly konvexity a konkávity funkce f.

e) Určete všechny asymptoty funkce $f(x)$.

e) Načrtněte graf funkce f.

[5 bodů]

52. Vyšetřete průběh funkce f: $y = \operatorname{arccotg} \frac{3}{x}$, tj. určete

a) definiční obor $D(f)$.

b) intervaly spojitosti funkce f,

c) všechny asymptoty funkce f,

d) derivaci f' a intervaly monotonie funkce f,

e) inflexní body a intervaly konvexity a konkavity funkce f,

f) graf funkce f.

[5 bodů]

53. Vyšetřete průběh funkce f: $y = \operatorname{arctg} \frac{3}{x}$, tj. určete

a) definiční obor $D(f)$.

b) intervaly spojitosti funkce f,

c) všechny asymptoty funkce f,

d) derivaci f' a intervaly monotonie funkce f,

e) inflexní body a intervaly konvexity a konkavity funkce f,

f) graf funkce f.

[5 bodů]

54. Vyšetřete průběh funkce f: $y = \operatorname{arctg} \frac{4}{x}$, tj. určete

a) definiční obor $D(f)$.

b) intervaly spojitosti funkce f,

c) všechny asymptoty funkce f,

d) derivaci f' a intervaly monotonie funkce f,

e) inflexní body a intervaly konvexity a konkavity funkce f,

f) graf funkce f.

[5 bodů]

55. Vyšetřete průběh funkce f: $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x}$, tj. určete

a) definiční obor $D(f)$.

b) všechny asymptoty funkce f,

c) derivaci f' a intervaly monotonie funkce f,

d) inflexní body a intervaly konvexity a konkavity funkce f,

e) graf funkce f.

[4 body]

56. Vyšetřete průběh funkce f: $y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$, tj. určete

a) definiční obor $D(f)$.

b) všechny asymptoty funkce f,

c) derivaci f' a intervaly monotonie funkce f,

d) inflexní body a intervaly konvexity a konkavity funkce f,

e) graf funkce f.

[4 body]

57. Vyšetřete průběh funkce f: $y = x + \dfrac{1}{1+x}$, tj. určete

a) definiční obor $D(f)$.

b) intervaly spojitosti funkce f,

c) všechny asymptoty funkce f,

d) derivaci f' a intervaly monotonie funkce f,

e) inflexní body a intervaly konvexity a konkavity funkce f,

f) graf funkce f.

[5 bodů]

58. Vyšetřete průběh funkce f: $y = x + \frac{1}{x}$, tj. určete

a) definiční obor $D(f)$.

b) intervaly spojitosti funkce f,

c) všechny asymptoty funkce f,

d) derivaci f' a intervaly monotonie funkce f,

e) inflexní body a intervaly konvexity a konkavity funkce f,

f) graf funkce f.

[5 bodů]

59. Je dána funkce $f(x) = x - \dfrac{1}{x+1}$.

a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a stanovte limity (příp. jednostranné) v krajních bodech definičního oboru.
b) Stanovte nulové body funkce f, tj. určete body, ve kterých je $f(x) = 0$.
c) Určete f' a stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.
d) Určete f'' a stanovte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce f.
e) Napište rovnice (všech) asymptot grafu funkce f.
f) Nakreslete graf funkce f (včetně asymptot).

[5 bodů]

60. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a stanovte limity (příp. jednostranné) v krajních bodech definičního oboru.
b) Určete f' a stacionární body funkce f.
c) Stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.
d) Určete f'' a stanovte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce f.
e) Napište rovnice (všech) asymptot grafu funkce f.
f) Nakreslete graf funkce f (včetně asymptot).

[5 bodů]

61. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.

a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a stanovte limity (příp. jednostranné) v krajních bodech definičního oboru.
b) Určete f' a stacionární body funkce f.
c) Stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.

d) Určete f'' a stanovte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce f.

e) Napište rovnice (všech) asymptot grafu funkce f.

f) Nakreslete graf funkce f (včetně asymptot).

[5 bodů]

62. Je dána funkce $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$.

a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a stanovte limity (jednostranné i příp. oboustranné) v krajních bodech definičního oboru.

b) Určete f' na $\mathrm{D}(f)$ a stacionární body funkce f.

c) Stanovte intervaly růstu a klesání funkce f.

d) Určete f'' a stanovte intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce f.

e) Napište rovnice (všech) asymptot grafu funkce f.

f) Nakreslete graf funkce f (včetně asymptot).

[5 bodů]

63. Vyšetřete průběh funkce $f\colon y = x + \dfrac{1}{1+x}$, tj. určete

a) definiční obor $D(f)$.

b) intervaly spojitosti funkce f,

c) všechny asymptoty funkce f,

d) derivaci f' a intervaly monotonie funkce f,

e) inflexní body a intervaly konvexity a konkavity funkce f,

f) graf funkce f.

[5 bodů]

Integrály]

1. Vypočtěte $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{1}{x^2+4}\, dx.$ [2 body]
2. Vypočtěte $\int\limits_{-3}^{3} \dfrac{1}{x^2+9}\, dx.$ [2 body]
3. Vypočtěte $\int\limits_{-1}^{0} \frac{\sqrt{1+x}}{2+x}\, dx.$ [2 body]
4. Vypočtěte $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx.$ [2 body]
5. Vypočtěte $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{\sqrt{2+x}}{3+x}\, dx.$ [2 body]
6. Vypočtěte $\int\limits_{2}^{3} \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}\, dx.$ [2 body]
7. Vypočtěte $\int\limits_{3}^{4} \frac{\sqrt{x-3}}{x-2}\, dx.$ [2 body]
8. Vypočtěte $\int\limits_{2}^{3} \dfrac{1}{1-x^2}\, dx.$ [2 body]
9. Vypočtěte $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{x^2}{1+x^2}\, dx.$ [2 body]
10. Vypočtěte $\int \frac{x^2}{x-1}\, dx.$ [2 body]
11. Vypočtěte $\int \dfrac{(x+1)^2}{3x}\, dx.$ [2 body]
12. Vypočtěte $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}.$ [2 body]
13. Vypočtěte $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{(x-1)^2}{3x^2}\, dx.$ [2 body]
14. Vypočtěte $\int\limits_{1}^{2} \dfrac{(2x+1)^2}{x^2}\, dx.$ [2 body]

15. Vypočtěte $\int\limits_1^2 \dfrac{(x-2)^2}{x^3}\ dx.$ [2 body]

16. Vypočtěte $\int \frac{5x}{\sqrt{x^2-7}}.$ [2 body]

17. Vypočtěte $\int \frac{4x}{\sqrt{x^2+6}}.$ [2 body]

18. Vypočtěte $\int \frac{7x}{\sqrt{x^2+3}}.$ [2 body]

19. Vypočtěte $\int \operatorname{tg} x\ dx.$ [2 body]

20. Vypočtěte $\int \operatorname{cotg} x\ dx.$ [2 body]

21. Vypočtěte $\int \sin^2 x\ dx.$ [2 body]

22. Vypočtěte $\int \sin x \cos x\ dx.$ [2 body]

23. Vypočtěte $\int \cos^2 x\ dx.$ [2 body]

24. Vypočtěte $\int \cos^2 x \sin^3 x\ dx.$ [2 body]

25. Vypočtěte $\int \sin^2 x \cos^3 x\ dx.$ [2 body]

26. Vypočtěte $\int \sin^4 x \cos^3 x\ dx.$ [2 body]

27. Vypočtěte $\int \sin^3 x \cos^2 x\ dx.$ [2 body]

28. Vypočtěte $\int \cos^4 x \sin^3 x\ dx.$ [2 body]

29. Vypočtěte $\int \dfrac{3}{(x^2+1)^3}\ dx.$
    Použijte rekurentní vzorec
    $\int \dfrac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\ dx = \dfrac{1}{2n}\dfrac{x}{(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}\int \dfrac{1}{(1+x^2)^n}\ dx.$

30. Vypočtěte integrál $\int \dfrac{x^2}{x^2+1}\ dx.$ [2 body]

31. Vypočtěte integrál $\int \dfrac{x}{x^2+1}\ dx.$ [2 body]

32. Vypočtěte integrál $\int \dfrac{x}{x^2-1}\ dx.$ [2 body]

33. Vypočtěte integrál $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$. [2 body]

34. Pomocí substituce $e^x = t$ vypočtěte $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$. [2 body]

35. Pomocí substituce $e^x = t$ vypočtěte $\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx$. [2 body]

36. Substitucí $\ln x = t$ vypočtěte $\int \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$. [2 body]

37. Vypočtěte integrál $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx$. [2 body]

38. Pomocí metody per partes, příp. substituční metody vypočtěte $\int(2-x^2)e^{5x}\,dx$. [2 body]

39. Pomocí metody per partes, příp. substituční metody vypočtěte $\int(x^2+5)\cos 3x\,dx$. [2 body]

40. Vypočtěte $\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$. [2 body]

41. Vypočtěte $\int \frac{1}{x^2+6x+10}\,dx$. [2 body]

42. Vypočtěte obsah plochy ohraničené jedním obloukem sinusoidy a osou x. [2 body]

43. Vypočtěte obsah plochy ohraničené jedním obloukem kosinusoidy a osou x. [2 body]

44. Je dána funkce $f(x) = (x-1)^2e^{2x}$.

    a) Určete definiční obor funkce f a dokažte, že funkce $F(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2e^{2x} - \frac{1}{2}(x-1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$.

    b) Přesvědčte se o tom, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$, tj. ukažte, že platí $F'(x) = f(x)$ na $D(f)$.

    c) Najděte primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[1, 0]$.

[5 bodů]

45. Je dána funkce $f(x) = (x+1)^2 e^{2x}$.

a) Určete definiční obor funkce f a dokažte, že funkce $F(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 e^{2x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$.

b) Přesvědčte se o tom, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$, tj. ukažte, že platí $F'(x) = f(x)$ na $D(f)$.

c) Najděte primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[1, 0]$.

[5 bodů]

46. Je dána funkce $f(x) = (x+1)3^x$.

(a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce f.

(b) Pomocí metody per partes ukažte, že primitivní funkce k funkci f na $D(f)$ je funkce $F(x) = \frac{(x+1)3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3}x$.

(c) Dokažte, že $F'(x) = f(x)$.

(d) Vypočtěte $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

[5 bodů]

47. Je dána funkce $f(x) = (x+1)5^x$.

(a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce f.

(b) Pomocí metody per partes ukažte, že primitivní funkce k funkci f na $D(f)$ je funkce $F(x) = \frac{(x+1)5^x}{\ln 5} - \frac{5^x}{\ln^2 5}x$.

(c) Dokažte, že $F'(x) = f(x)$.

(d) Vypočtěte $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

[5 bodů]

48. Je dána funkce $f : y = x \cdot 3^{-x}$.

a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$ je funkce

$$F(x) = -\frac{3^{-x}}{\ln 3}\left(x + \frac{1}{\ln 3}\right).$$

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$.

c) Určete primitivní funkci G k funkci f, jejíž graf prochází bodem $[0, 0]$.

[5 bodů]

49. Je dána funkce $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

a) Stanovte $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes a substituční metody ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$ je funkce $F(x) = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1)$.

b) Najděte primitivní funkci k funkci f, jejíž graf prochází bodem $[1, 1]$.

c) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$. Platí na $\mathrm{D}(f)$?

[5 bodů]

50. Je dána funkce $f(x) = e^{x^2}x^3$.

a) Stanovte $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes a substituční metody ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $I \subset \mathrm{D}(f)$ je funkce $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1)$.

b) Existuje ještě jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I? Pokud ano, napište její předpis.

c) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$. Platí na $\mathrm{D}(f)$?

[5 bodů]

51. Je dána funkce $f(x) = x(x + 1)e^x$.

a) Stanovte $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes a substituční metody ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $I \subset \mathrm{D}(f)$ je funkce $F(x) = x^2e^x - xe^x + e^x$.

b) Existuje ještě jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I? Pokud ano, napište její předpis.

c) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$. Platí na $\mathrm{D}(f)$?

[5 bodů]

52. Je dána funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = (x+1)^2e^{3x}$.

a) Stanovte $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes (příp. substituční metody) ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$ je funkce $F(x) = (x+1)^2 - \frac{2}{9}(x+1)e^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x}$.

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$. Platí na $\mathrm{D}(f)$?

c) Najděte primitivní funkci k funkci $f(x)$, jejíž graf prochází bodem $[0, 1]$.

[5 bodů]

53. Je dána funkce $f(x) = (x-1)^2 \cos x$.

a) Určete definiční obor funkce f a dokažte, že funkce $F(x) = (x-1)^2 \sin x + 2(x-1)\cos x - 2\sin x$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$.

b) Přesvědčte se o tom, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$, tj. ukažte, že platí $F'(x) = f(x)$ na $D(f)$.

c) Najděte primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[0, 1]$.

[5 bodů]

54. Je dána funkce $f(x) = (x+1)^2 \sin x$.

a) Určete definiční obor funkce f a dokažte, že funkce $F(x) = -(x+1)^2 \cos x + 2(x+1)\sin x + 2\cos x$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$.

b) Přesvědčte se o tom, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$, tj. ukažte, že platí $F'(x) = f(x)$ na $D(f)$.

c) Najděte primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[0, 1]$.

[5 bodů]

55. Je dána funkce $f(x) = x^2 \cos 5x$.

a) Určete definiční obor funkce f a dokažte, že funkce $F(x) = \frac{x^2}{5} \sin 5x + \frac{2x}{25} \cos 5x - \frac{2}{125} \sin 5x$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$.

b) Přesvědčte se o tom, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$, tj. ukažte, že platí $F'(x) = f(x)$ na $D(f)$.

c) Najděte primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[0, 1]$.

[5 bodů]

56. Je dána funkce $f(x) = x^2 \sin 3x$.

a) Určete definiční obor funkce f a dokažte, že funkce $F(x) = -\frac{x^2}{3} \cos 3x + \frac{2x}{9} \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$.

b) Přesvědčte se o tom, že funkce $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci f na $D(f)$, tj. ukažte, že platí $F'(x) = f(x)$ na $D(f)$.

c) Najděte primitivní funkci, jejíž graf prochází bodem $[0, 1]$.

[5 bodů]

57. Je dána funkce $f:\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x \cos 2x$.

a) Určete D a pomocí metody per partes, popř. substituční metody, ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na D je funkce $F(x) = \frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x$.

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na D.

c) Určete tu z primitivních funkcí, jejíž graf prochází bodem $[0, 0]$.

[5 bodů]

58. Je dána funkce $f : y = (x+1)\sin 2x$.

    a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$ je funkce

    $$F(x) = -\frac{x+1}{2}\cos 2x + \frac{\sin 2x}{4}.$$

    b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$.

    c) Určete primitivní funkci G k funkci f, jejíž graf prochází bodem $[0, \frac{1}{2}]$.

[5 bodů]

59. Je dána funkce $f(x) = x \operatorname{arccotg} x$.

    (a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce f.

    (b) Pomocí metody per partes ukažte, že primitivní funkce k funkci f na $D(f)$ je funkce $F(x) = -\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arccotg} x + \frac{1}{2}x$.

    (c) Dokažte, že $F'(x) = f(x)$.

    (d) Vypočtěte $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

[5 bodů]

60. Je dána funkce $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

    (a) Určete definiční obor $D(f)$ funkce f.

    (b) Pomocí metody per partes ukažte, že primitivní funkce k funkci f na $D(f)$ je funkce $F(x) = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x$.

    (c) Dokažte, že $F'(x) = f(x)$.

    (d) Vypočtěte $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

[5 bodů]

61. Je dána funkce $f:\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$.

a) Určete D a pomocí metody per partes, popř. substituční metody, ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na D je funkce $F(x) = x \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\ln(1+4x^2)$.

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na D.

c) Určete tu z primitivních funkcí, jejíž graf prochází bodem $[0,1]$.

[5 bodů]

62. Je dána funkce $f:\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \operatorname{arccotg} 3x$.

a) Určete D a pomocí metody per partes, popř. substituční metody, ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na D je funkce $F(x) = x \operatorname{arccotg} 3x + \frac{1}{6}\ln(1+9x^2)$.

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na D.

c) Určete tu z primitivních funkcí, jejíž graf prochází bodem $[0,1]$.

[5 bodů]

63. Je dána funkce $f(x) = \arcsin x$.

a) Stanovte $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes a substituční metody ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $I \subset \mathrm{D}(f)$ je funkce $F(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

b) Existuje ještě jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I? Pokud ano, napište její předpis.

c) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$. Platí na $\mathrm{D}(f)$?

[5 bodů]

64. Je dána funkce $f:\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x^2 \operatorname{arccotg} x$.

a) Určete D a pomocí metody per partes a substituční metody ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na D je funkce $F(x) = \frac{x^3}{3} \operatorname{arccotg} x + \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6}\ln(x^2+1)$.

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na D.

c) Určete tu z primitivních funkcí, jejíž graf prochází bodem $[1, \frac{1}{6}]$.

[5 bodů]

65. Je dána funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$.

a) Stanovte $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes a substituční metody ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu $I \subset \mathrm{D}(f)$ je funkce $F(x) = x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

b) Existuje ještě jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na I? Pokud ano, napište její předpis.

c) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$. Platí na $\mathrm{D}(f)$?

[5 bodů]

66. Je dána funkce $f : y = (x^2+1)\ln x$.

a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$ je funkce

$$F(x) = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\ln x - \left(\frac{x^3}{9} + x\right).$$

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$.

c) Určete primitivní funkci G k funkci f, jejíž graf prochází bodem $[1, -\frac{1}{9}]$.

[5 bodů]

67. Je dána funkce $f :\ \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = x \ln 2x$.

a) Určete D a pomocí metody per partes, popř. substituční metody, ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na D je funkce $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln 2x - \frac{x^2}{4}$.

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na D.

c) Určete tu z primitivních funkcí, jejíž graf prochází bodem $[\frac{1}{2}, 1]$.

[5 bodů]

68. Je dána funkce $f : y = (x + 2)\ln x$.

a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$ je funkce

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x - \left(\frac{x^2}{4} + 2x\right).$$

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$.

c) Určete primitivní funkci G k funkci f, jejíž graf prochází bodem $[1, -\frac{1}{4}]$.

[5 bodů]

69. Je dána funkce $f : y = (x + 1)\ln x$.

a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$ je funkce

$$F(x) = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \left(\frac{x^2}{4} + x\right).$$

b) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$.

c) Určete primitivní funkci G k funkci f, jejíž graf prochází bodem $[1, -\frac{1}{4}]$.

[5 bodů]

70. Je dána funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = \dfrac{\ln(\ln x)}{x}$.

a) Stanovte $\mathrm{D}(f)$ a pomocí metody per partes a substituční metody (použijte substituci $\ln x = t$) ukažte, že primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$ je funkce $F(x) = [\ln(\ln x) - 1] \ln x$.

b) Existuje ještě jiná primitivní funkce k funkci $f(x)$ na $\mathrm{D}(f)$? Pokud ano, napište její předpis.

c) Přesvědčte se, zda platí rovnost $F'(x) = f(x)$. Platí na $\mathrm{D}(f)$?

[5 bodů]

71. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x - 14}{x^3 - 4x^2 + 2x - 8}$.

a) Určete D a body nespojitosti funkce f.

b) U bodu nespojitosti rozhodněte o typu nespojitosti.

d) Rozložte funkci f na parciální zlomky.

e) Vypočtěte $\int f(x)\, dx$.

[5 bodů]

72. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x + 6}$.

a) Určete definiční obor funkce f a intervaly spojitosti.

b) Rozložte funkci f na součet parciálních zlomků.

c) Vypočtěte $\int f(x)\, dx$.

[5 bodů]

73. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{-3x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x + 6}$.

a) Určete definiční obor funkce f a intervaly spojitosti.

b) Rozložte funkci f na součet parciálních zlomků.

c) Vypočtěte $\int f(x)\ dx$.

[5 bodů]

74. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 13}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$.

    a) Určete definiční obor funkce f a intervaly spojitosti.
    b) U bodů nespojitosti určete jejich typ.
    b) Rozložte funkci f na součet parciálních zlomků.
    c) Vypočtěte $\int f(x)\ dx$.

[5 bodů]

75. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 6}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$.

    a) Určete definiční obor funkce f a intervaly spojitosti.
    b) U bodů nespojitosti určete jejich typ.
    b) Rozložte funkci f na součet parciálních zlomků.
    c) Vypočtěte $\int f(x)\ dx$.

[5 bodů]

76. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{-4x^2 + 3x - 19}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$.

    a) Určete definiční obor funkce f a intervaly spojitosti.
    b) U bodů nespojitosti určete jejich typ.
    b) Rozložte funkci f na součet parciálních zlomků.
    c) Vypočtěte $\int f(x)\ dx$.

[5 bodů]

77. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{-2x^2 + 8x}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$.

a) Určete definiční obor funkce f a intervaly spojitosti.

b) U bodů nespojitosti určete jejich typ.

b) Rozložte funkci f na součet parciálních zlomků.

c) Vypočtěte $\int f(x)\,dx$.

[5 bodů]

78. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 2x - 14}{x^3 - 4x^2 + 2x - 8}$.

a) Určete D a body nespojitosti funkce f.

b) U bodu nespojitosti rozhodněte o typu nespojitosti.

c) Vyslovte definici spojitosti funkce f v bodě x_0.

d) Rozložte funkci f na parciální zlomky.

e) Vypočtěte $\int f(x)\,dx$.

[5 bodů]

79. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{-x - 9}{x^3 - x^2 + 9x - 9}$.

a) Určete D(f) a body nespojitosti funkce f.

b) U bodu nespojitosti rozhodněte o typu nespojitosti.

c) Rozložte funkci f na parciální zlomky.

d) Vypočtěte $\int f(x)\,dx$.

[5 bodů]

80. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 4}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$.

a) Určete D(f) a body nespojitosti funkce f.

b) U bodu nespojitosti rozhodněte o typu nespojitosti.

c) Rozložte funkci f na parciální zlomky.

d) Vypočtěte $\int f(x)\, dx$.

[5 bodů]

81. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 9}{x^3 - x^2 + 9x - 9}$.

   a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a body nespojitosti funkce f.
   b) U bodu nespojitosti rozhodněte o typu nespojitosti.
   c) Rozložte funkci f na parciální zlomky.
   d) Vypočtěte $\int f(x)\, dx$.

[5 bodů]

82. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{-6x^2 - 2x - 56}{x^3 + x^2 + 9x + 9}$.

   a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a body nespojitosti funkce f.
   b) Vyslovte definici spojitosti funkce f v bodě x_0.
   c) Rozložte funkci f na parciální zlomky.
   d) Vypočtěte $\int f(x)\, dx$.

[5 bodů]

83. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$.

   a) Určete $\mathrm{D}(f)$ a body nespojitosti funkce f.
   b) Vyslovte definici spojitosti funkce f v bodě x_0.
   c) Rozložte funkci f na parciální zlomky.
   d) Vypočtěte $\int f(x)\, dx$.

[5 bodů]

84. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{-6x^2 - 2x - 56}{x^3 + x^2 + 9x + 9}$.

a) Určete D(f) a body nespojitosti funkce f.

b) U bodu nespojitosti rozhodněte o typu nespojitosti.

c) Rozložte funkci f na parciální zlomky.

d) Vypočtěte $\int f(x)\, dx$.

[5 bodů]

85. Je dána funkce $f(x) = \dfrac{-x-9}{x^3 - x^2 + 9x - 9}$.

a) Určete D(f) a body nespojitosti funkce f.

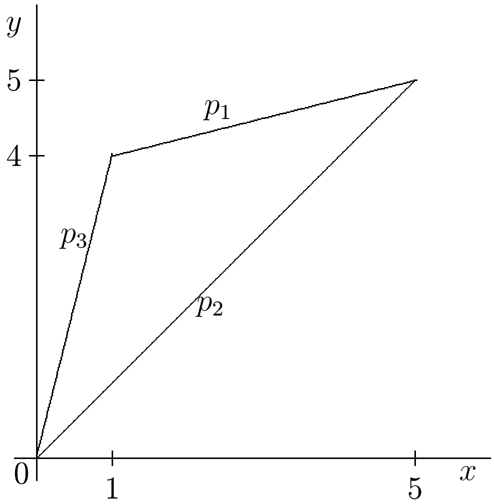
b) U bodu nespojitosti rozhodněte o typu nespojitosti.

c) Rozložte funkci f na parciální zlomky.

d) Vypočtěte $\int f(x)\, dx$.

[5 bodů]

86. Na obr. je znázorněna plocha ohraničená přímkami $p_1, p_2.p_3$.

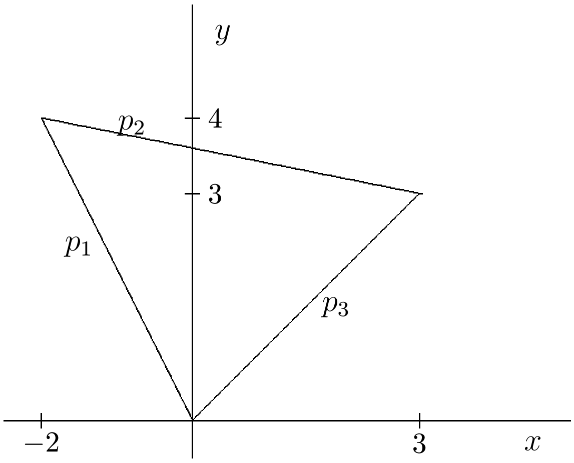


a) Napište rovnice přímek p_1, p_2, p_3.

b) Pomocí určitého integrálu vypočtěte velikost vyznačené plochy.

[5 bodů]

87. Na obr. je znázorněna plocha ohraničená přímkami $p_1, p_2.p_3$.

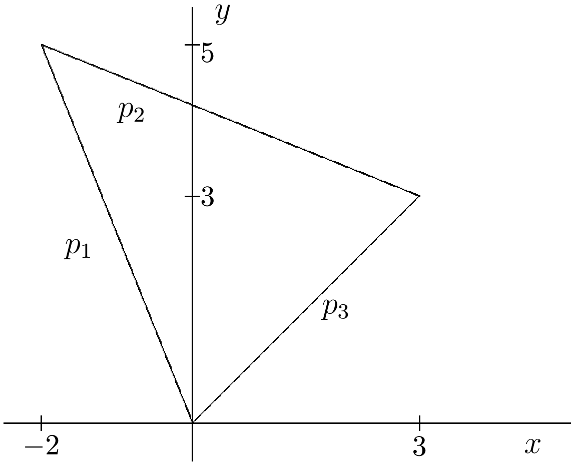


a) Napište rovnice přímek p_1, p_2, p_3.

b) Pomocí určitého integrálu vypočtěte velikost vyznačené plochy.

[5 bodů]

88. Na obr. je znázorněna plocha ohraničená přímkami $p_1, p_2.p_3$.

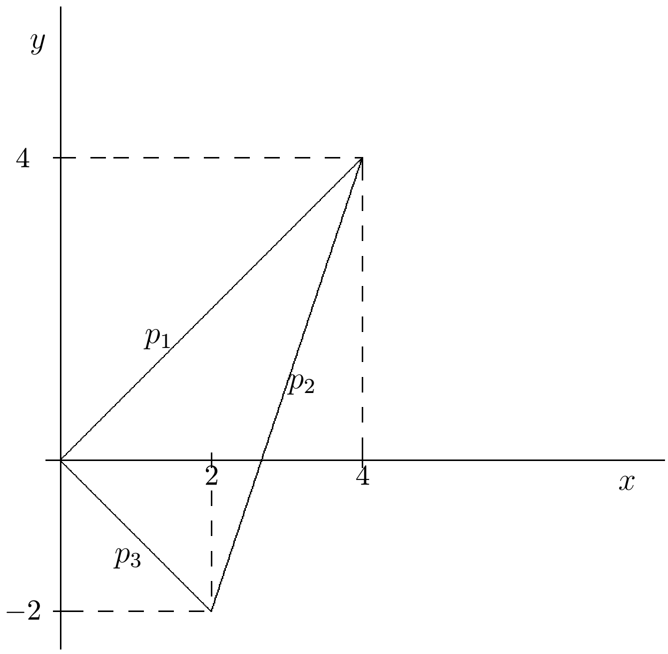


a) Napište rovnice přímek p_1, p_2, p_3.

b) Pomocí určitého integrálu vypočtěte velikost vyznačené plochy.

[5 bodů]

89. Na obr. je znázorněna plocha ohraničená přímkami $p_1, p_2.p_3$.

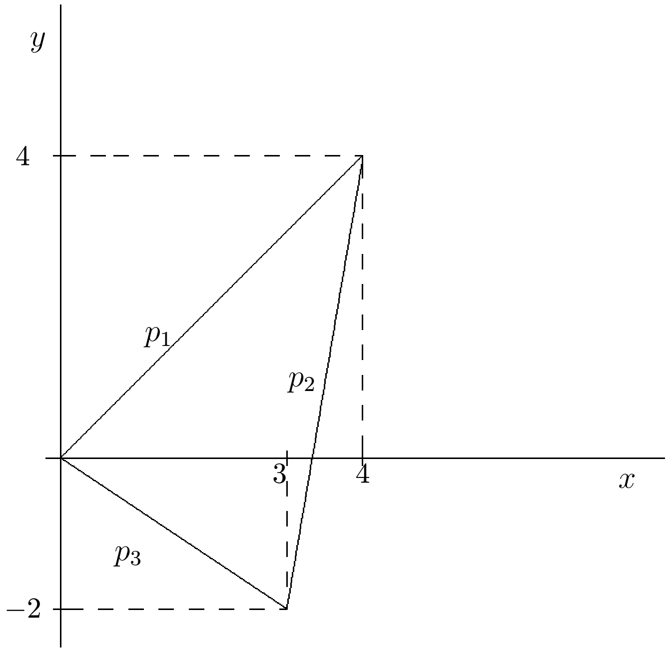


a) Napište rovnice přímek p_1, p_2, p_3.

b) Pomocí určitého integrálu vypočtěte velikost vyznačené plochy.

[5 bodů]

90. Na obr. je znázorněna plocha ohraničená přímkami $p_1, p_2.p_3$.

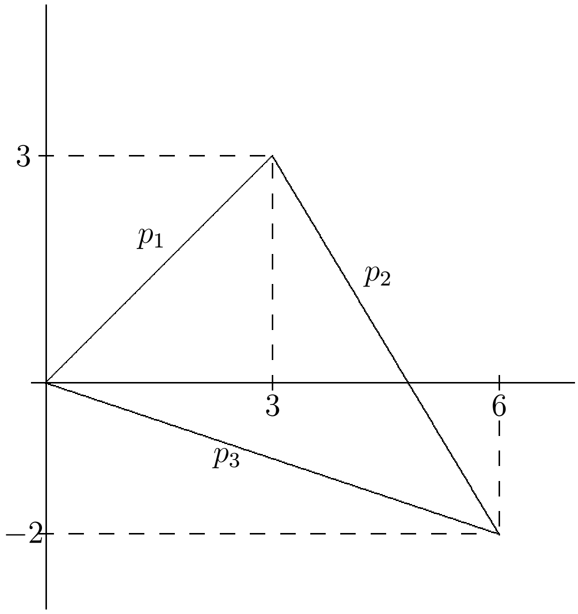


a) Napište rovnice přímek p_1, p_2, p_3.

b) Pomocí určitého integrálu vypočtěte velikost vyznačené plochy.

[5 bodů]

91. Na obr. je znázorněna plocha ohraničená přímkami $p_1, p_2.p_3$.

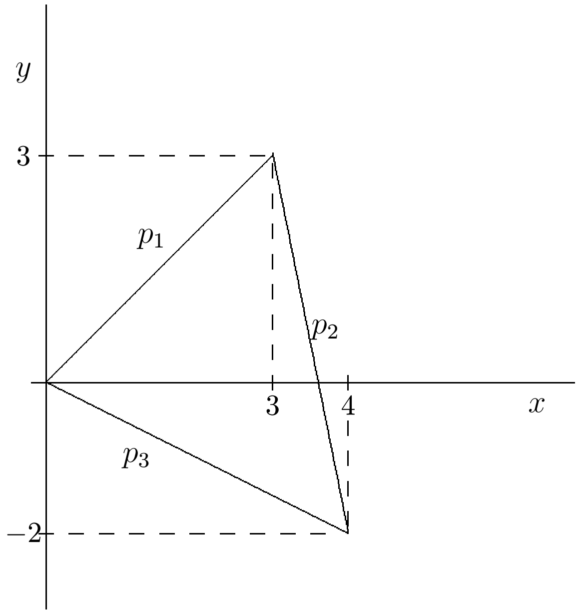


a) Napište rovnice přímek p_1, p_2, p_3.

b) Pomocí určitého integrálu vypočtěte velikost vyznačené plochy.

[5 bodů]

92. Na obr. je znázorněna plocha ohraničená přímkami $p_1, p_2.p_3$.



a) Napište rovnice přímek p_1, p_2, p_3.

b) Pomocí určitého integrálu vypočtěte velikost vyznačené plochy.

[5 bodů]

Taylorův polynom

1. Odvoďte Taylorův polynom 3. stupně pro funkci $f(x) = \ln(1+x)$ v bodě $x_0 = 0$. [2 body]

2. Odvoďte Taylorův polynom 3. stupně pro funkci $f(x) = \ln x$ v bodě $x_0 = 1$. [2 body]

3. Odvoďte Taylorův polynom 3. stupně pro funkci $f(x) = \cos x$ v bodě $x_0 = 0$. [2 body]

4. Odvoďte rozvoj funkce $f(x) = \sin x$ podle Taylorovy věty v okolí bodu $x_0 = 0$. [3 body]

5. Je dána funkce $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

   (a) Vyslovte Taylorovu větu pro funkci f v bodě x_0.

   (b) Napište Maclaurinův polynom 3. stupně pro funkci g.

   (c) Pomocí nalezeného Maclaurinova polynomu vypočtěte $\operatorname{arctg} 0,2$.

   [5 bodů]

6. Je dána funkce $g(x) = \operatorname{arccotg} x$.

   (a) Vyslovte Taylorovu větu pro funkci f v bodě x_0.

   (b) Napište Maclaurinův polynom 3. stupně pro funkci g.

   (c) Pomocí nalezeného Maclaurinova polynomu vypočtěte $\operatorname{arccotg} 0,2$.

   [5 bodů]

7. Je dána funkce $g(x) = \arcsin x$.

   (a) Vyslovte Taylorovu větu pro funkci f v bodě x_0.

   (b) Napište Maclaurinův polynom 2. stupně pro funkci g.

   (c) Pomocí nalezeného Maclaurinova polynomu vypočtěte $\arcsin 0,2$.

   [5 bodů]

8. Je dána funkce $g(x) = \arccos x$.

   (a) Vyslovte Taylorovu větu pro funkci f v bodě x_0.
   (b) Napište Maclaurinův polynom 2. stupně pro funkci g.
   (c) Pomocí nalezeného Maclaurinova polynomu vypočtěte $\arccos 0,2$.

[5 bodů]

9. a) Formulujte Taylorovu větu pro rozvoj funkce $f\colon y = f(x)$ v bodě x_0.
   b) Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $x^x - 1$ v bodě $x_0 = 1$.
   c) Pomocí vypočteného Taylorova polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu $1,1^{1,1} - 1$.

[4 body]

10. a) Formulujte Taylorovu větu pro rozvoj funkce $f\colon y = f(x)$ v bodě x_0.
    b) Napište Taylorův polynom 2. stupně funkce $\sqrt[3]{1+x}$ v bodě $x_0 = 0$.
    c) Pomocí vypočteného Taylorova polynomu vypočtěte přibližnou hodnotu $\sqrt[3]{1,1}$.

[4 body]