7. Integrální počet

7.1. Základní pojmy

7.1.1. Definice

Nechť $F: I \to R$ je primitivní funkce k funkci $f: I \to R$ a $\langle a,b\rangle \subset I$ je daný interval.
Číslo

$$F(b) - F(a) = J$$

nazveme určitý integrál funkce f přes interval $\langle a,b\rangle$ a značí se

$$J = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f = \int_{\langle a,b\rangle} f = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz$$

Toto číslo nezávisí na výběru primitivní funkce ze systému
$F(x) + C$.

7.1.2. Vlastnosti

Pro libovolné $a, b, c \in I$ platí

(a) $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f \iff F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$;

(b) $\displaystyle\int_a^a f = 0 \iff F(a) - F(a) = 0$;

(c) $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b \iff F(b) - F(a) = F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$;

(d) $\displaystyle\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f \iff [\alpha F(b) - \alpha F(a)] = \alpha [F(b) - F(a)]$

(e) $\displaystyle\int_a^b [f_1 + f_2] = \int_a^b f_1 + \int_a^b f_2 \iff \ldots$

Př: $$\int_1^3 \ln x \, dx = \left[x\ln x - x\right]_{x=3} - \left[x \ln x - x\right]_{x=1} = \left[x\ln x - x\right]_1^3 =$$

$$= 3\ln 3 - 3 - 1\cdot \ln 1 + 1 = 3\ln 3 - 2 .$$

Př: $$\int_{-2}^{5} \frac{dx}{x^2} = ?$$ $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $F(x) = -\frac{1}{x}$; !

číslo $F(5) - F(-2) = -\frac{1}{5} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{10}$ není určitým integrálem ! Proč ?

odpověď: K funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ neexistuje spojitá $F(x)$ na $\langle -2, 5\rangle$.

→ neomezená funkce na $\langle -2, 5\rangle$!

7.1.3. Střední hodnota

~~Platí~~ Existuje $\xi \in (a,b)$, že

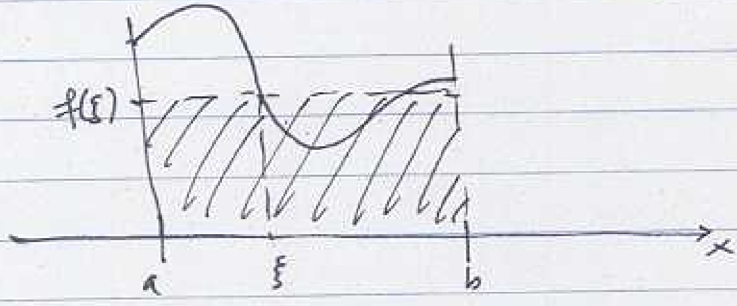
$$F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)dx ,$$

pak číslo

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

se nazývá střední hodnota funkce f na $\langle a, b\rangle$

Geometrický význam: výška obdélníka – viz obr.



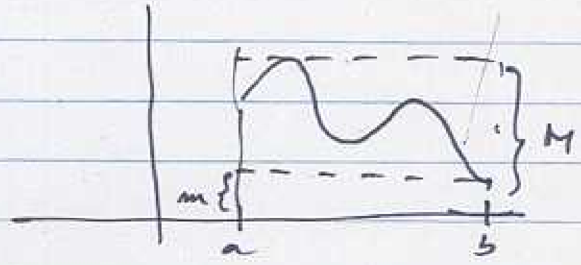
Př: Pro funkci $i(t) = I_0 \sin \frac{2\pi}{T} t$ stanovme střední hodnotu funkce $i^2(t)$ na periodě T: $\int_0^T i^2(t)dt = I_0^2 \int_0^T \sin^2 \frac{2\pi}{T} t \, dt = \dots\dots = I_0^2 \frac{T}{2}$;

→ $\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt = \frac{I_0^2}{2}$; číslo $\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)dt}$ se nazývá efektivní hodnota.

Důsledek 1. Je-li $M = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$, $m = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x)$,

tj. $m \leqq f(x) \leqq M$, $\forall x \in \langle a,b\rangle$

pak
$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq M(b-a).$$



Důsledek 2. Je-li $f(x) \geqq 0$, $x \in \langle a,b\rangle$, pak
$$\int_a^b f(x)dx \geqq 0$$

Plyne z důsledku 1.

Důsledek 3. Je-li $f(x) \geqq g(x)$, $x\in\langle a,b\rangle$, pak
$$\int_a^b f(x)dx \geqq \int_a^b g(x)dx$$

Plyne z důsledku 2.

Důsledek 4. Existují-li primitivní funkce k funkcím f a $|f|$ na $\langle a,b\rangle$, pak
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|dx$$

Plyne z důsledku 3 a ze zřejmých nerovností
$$-|f(x)| \leqq f(x) \leqq |f(x)|$$

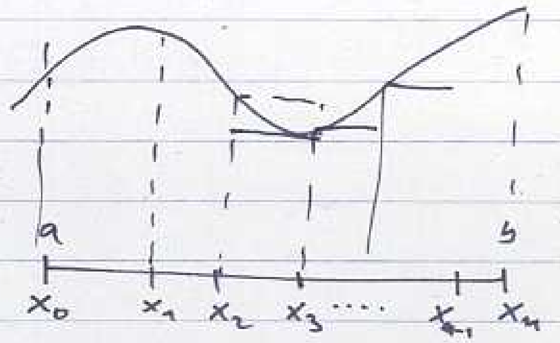
neboť
$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b |f(x)|dx$$

Poznámka: $-u \leqq z \leqq u \iff |z| \leqq u$

7.2. Integrální součet

7.2.1. Horní a dolní součty

Zvolíme na $\langle a,b\rangle$ body



D: $x_0=a,\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1},\ x_n=b$

Pak

$$m_i(x_{i+1}-x_i) \leq \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx}_{F(x_{i+1})-F(x_i)} \leq M_i(x_{i+1}-x_i)\ , \quad \begin{matrix} M_i = \max f \\ m_i = \min f \end{matrix} \Big\}_{\text{na } \langle x_i, x_{i+1}\rangle}$$

a ~~kdo~~ položí

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = [F(x_n)-F(x_{n-1})]+[F(x_{n-1})-F(x_{n-2})]+\dots+[F(x_1)-F(x_0)],$$

pak
$$\boxed{\overbrace{\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i}^{L(f,D)} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overbrace{\sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i}^{U(f,D)}}\ , \quad \Delta x_i = x_{i+1}-x_i\,.$$

Tyto nerovnosti platí pro libovolné dělení $\{x_i\}$ intervalu $\langle a,b\rangle$

! Pro spojitou funkci na $\langle a,b\rangle$ je

$$\sup_D L(f,D) = \int_a^b f(x)\,dx = \inf_D U(f,D)\,.$$

Důkaz tohoto tvrzení: teorie Riemannova integrálu

7.2.2. Integrální součet

Nechť D je dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ – viz výše a τ_i je libovolný bod intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$. Číslo

$$J(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i)(x_{i+1}-x_i)$$

se nazývá integrální součet pro funkci f vzhledem k dělení D a k vybraným bodům τ_i.

Je-li f spojitá na $\langle a,b \rangle$, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové dělení $\mathcal{D}$ a takový výběr bodů τ_i, že

$$\left| J(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon ,$$

tj. integrál $\int_a^b f(x)dx$ lze libovolně přesně aproximovat vhodným ~~ix~~ integrálním součtem!

Tuto skutečnost zapisujeme

$$\lim_{\substack{\mathcal{D} \\ \max|\Delta x_i| \to 0}} J(f,\mathcal{D}) = \int_a^b f(x)dx .$$

Podmínky existence této limity – oddíl teorie integrálu.

7.2.3. Několik teoretických otázek a odpovědí

1. Je pojem horního, dolního, integrálního součtu závislý na pojmu primitivní funkce? Není!

2. Když existuje $\sup L(f,\mathcal{D}) = \inf U(f,\mathcal{D}) = \lim J(f,\mathcal{D})$, plyne odtud, že existuje primitivní funkce (klasická) k f? Neplyne!

3. Jak se (jak nazývá) to existující číslo z bodu 2?
   Opět určitý integrál a značí se stejně: $\int_a^b f(x)dx$

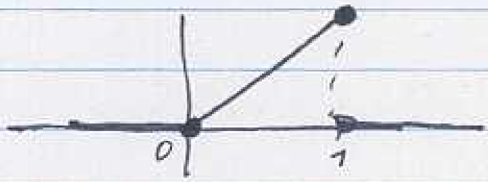
4. Jaká je nutná podmínka existence $\lim J(f,\mathcal{D})$?
   Omezenost funkce f na $\langle a,b \rangle$; spojitost nikoliv.
   Pro neomezenou funkci f neexistuje $\sup L(f,\mathcal{D})$ nebo $\inf U(f,\mathcal{D})$.

5. Potřebujeme k výpočtu určitého integrálu primitivní funkci?
Nepotřebujeme, ale je to pracné. Viz numerické metody.

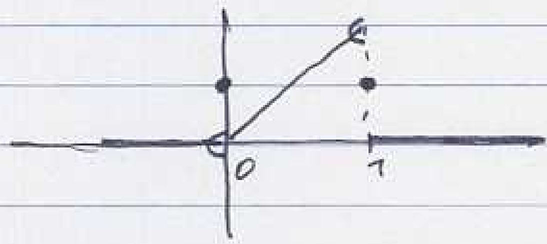
6. Mohou mít dvě různé funkce (lišící se v konečném počtu bodů) stejný určitý integrál?
Mohou! → musí!

Ilustrační příklad:

$$f_1(x) = \begin{cases} x, & x \in \langle 0,1 \rangle, \\ 0, & x \notin \langle 0,1 \rangle \end{cases}$$

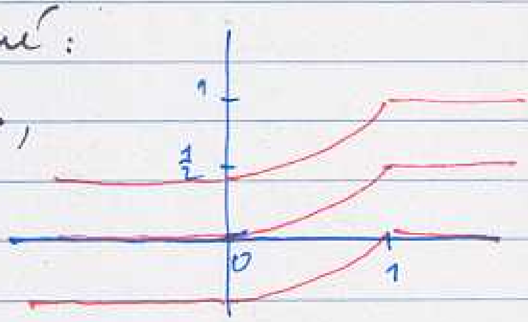


$$f_2(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1), \\ 0, & x \notin \langle 0,1 \rangle \\ \frac{1}{2}, & x=0,\ x=1 \end{cases}$$



Zobecněné primitivní funkce jsou stejné:

$$F_1(x) = F_2(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C, & x \in \langle 0,1 \rangle, \\ C, & x < 0, \\ \frac{1}{2} + C, & x > 1. \end{cases}$$



Pak např.
$$\int_{-2}^{5} f_1(x)\,dx = F_1(5) - F_1(-2) = \left(\frac{1}{2} + C\right) - (C) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-2}^{5} f_2(x)\,dx = \frac{1}{2};$$

Příloha

„Americká" metoda per partes

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

schema:

Dif		Int.
v	$+$	u'
v'		u
	$-uv$	

Př: $\int xe^x dx$:

D		I
x		e^x
	$+$	
1		e^x
	-1	

$$xe^x - \int 1\cdot e^x dx = \underline{xe^x - e^x + C}$$

Př: $\int x^3 e^{2x}$:

D		I
x^3		e^{2x}
	$+$	
$3x^2$		$\frac{1}{2}e^{2x}$
	$-$	
$6x$		$\frac{1}{4}e^{2x}$
	$+$	
6		$\frac{1}{8}e^{2x}$
	-6	

$$= x^3\tfrac{1}{2}e^{2x} - 3x^2\tfrac{1}{4}e^{2x} + 6x\tfrac{1}{8}e^{2x} - 6\int \tfrac{1}{8}e^{2x}dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}x^3e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2e^{2x} + \tfrac{3}{4}xe^{2x} - \tfrac{3}{8}e^{2x} + C$$

7.3. Metody integrování

Předpoklad: Integrovatelnost – vysvětlit

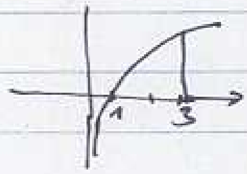
7.3.1. Integrování per partes

Z odst. 6.5.8 plyne vzorec: (Předpoklady jsou jasné.?)

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx .$$

Př.: $\displaystyle\int_1^3 \ln x\,dx = \left|\begin{matrix} u'=1, & u=x \\ v=\ln x, & v'=\frac{1}{x}\end{matrix}\right| = [x\ln x]_1^3 - \int_1^3 1\cdot dx = 3\ln 3 - 1\ln 1 - (3-1) =$

$= \underline{\underline{3\ln 3 - 2}}$



⟶ Příloha!

7.3.2. Substituce v určitém integrálu

Nechť pro složenou funkci

$$F(x) = G(f(x)) \quad , x\in I \quad , z = f(x)$$

platí

$$F'(x)\,dx = \underbrace{g(f(x))}_{g(z)}\underbrace{f'(x)\,dx}_{dz} ; \quad g(z) = G'(z) .$$

~~dosadíme~~ Potom pro $\langle a,b\rangle \subset I$

platí

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(z)\,dz .$$

Př.: $\displaystyle\int_{-1}^{2} 3x\sin(x^2+1)\,dx = \left|\begin{matrix} x^2+1 = z \\ 2x\,dx = dz \\ \langle -1,2\rangle \to \langle 2,5\rangle\end{matrix}\right| = \frac{3}{2}\int_2^5 \sin z\,dz = \frac{3}{2}[-\cos z]_2^5 =$

$= \frac{3}{2}[\cos 2 - \cos 5] .$

Př: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \\ \langle 0,1\rangle \to \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle \\ \text{nebo} \\ \langle 0,1\rangle \to \langle \frac{\pi}{2},\pi\rangle \\ \dots \text{atd} \end{array} \right| = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |\cos t| \cos t\,dt =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos t\,dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\ ; \quad !$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos t)\cos t\,dt = -\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad !$$

Kde je chyba?
Převod mezí!

$\langle a, b\rangle \longrightarrow \langle f(a), f(b)\rangle$

~~nebo~~ a nikoliv $\langle f(b), f(a)\rangle$

→ musí být $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t)\cos t\,dt$

neboť $\langle 0,1\rangle \longrightarrow \langle \sin\pi, \sin\frac{\pi}{2}\rangle$

$\int \frac{f'(x)\,dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$

Př: $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1+1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}\ ;$

$$\left| \begin{array}{l} x^2+x+1 = z \\ 2x+1 = dz \\ \langle 0,1\rangle \to \langle 1,3\rangle \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\ln z \Big]_1^3 = \frac{1}{2}\ln 3 = J_1$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{l} x+\frac{1}{2} = t \\ dx = dt \\ \langle 0,1\rangle \to \langle \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} =$$

$\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' = \frac{a}{x^2+a^2}$

$\int \frac{a\,dx}{x^2+a^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{3}}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right];$$

7.3.3. Integrál s proměnnou mezí

nechť $x, a \in I$. Pro integrovatelnou funkci $f: I \to R$ definujeme funkci $g: I \to R$ předpisem

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Ilustrace obrázkem!

a nazýváme integrál s proměnnou horní mezí

Vlastnosti:

1. Funkce $g: I \to R$ je spojitá:

$$g(x+\Delta x) - g(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\cdot)\cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} [g(x+\Delta x) - g(x)] = 0$$

2. Je-li f spojitá, potom $\exists\, \xi$ mezi x a $x+\Delta x$, že

$$g(x+\Delta x) - g(x) = f(\xi)\Delta x$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = g'(x)$$

! $\Rightarrow$ funkce g je primitivní k funkci f

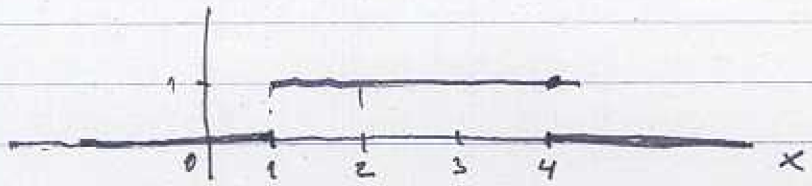
$\Rightarrow$ Budeme psát: $\boxed{\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)}$

$\Rightarrow$ vzorce: $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,;$$

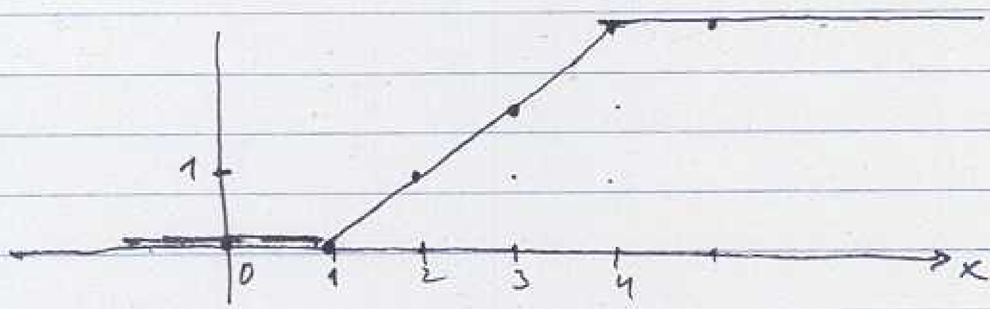
$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)\,dt = -f(x)\,;$$

Př: „grafické integrování"

$f(x)$:



$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ... nakreslete graf funkce g :



$g(0)$: $g(1)$, $g(2)=1$, $g(3)$, $g(4)$, $g(5)$ . .

7.4. nevlastní integrály ≡ zobecněné integrály

7.4.1. motivace

V odstavcích 7.1 a 7.2 (souhrnně v 7.3) jsme se zabývali situací, kdy byly splněny základní předpoklady:

(1) K funkci f (kterou chceme integrovat (přes $\langle a,b\rangle$)) existuje primitivní funkce F, tj. existují čísla

$$F(a),\ F(b),\ F(b)-F(a);$$

Funkce f s touto vlastností budeme nazývat newtonovsky integrovatelné funkce na $\langle a,b\rangle$ a tuto vlastnost registrovat značkou

$$f \in N(\langle a,b\rangle).$$

(2) Existují $\sup\limits_{D} L(f,D)$, $\inf\limits_{D} U(f,D)$, $\lim\limits_{D} J(f,D)$

a platí

$$\sup L(f,D) = \inf U(f,D) = \lim J(f,D).$$

Funkce f s touto vlastností nazýváme riemannovsky integrovatelné funkce na $\langle a,b\rangle$ a registrujeme ji značkou

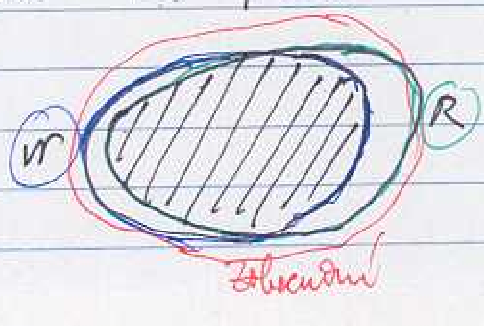
$$f \in R(a,b)$$

V matematické analýze se zkoumá, za jakých podmínek jsou implikace

$$f\in N \Rightarrow f\in R$$
$$f\in R \Rightarrow f\in N$$

pravdivé:

Ilustrace výsledku:



nejzajímavější vyšrafovaná část: $N\cap R$

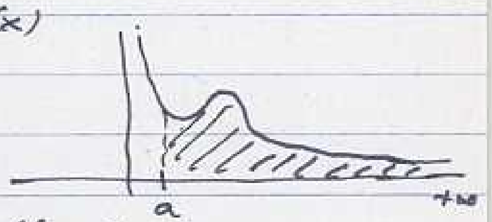
7.4.2. Zobecnění

a) <u>neomezený obor integrace</u>: „$a = -\infty$" nebo „$b = +\infty$", ale primitivní funkce existuje na každé omezené části.

Zobecnění: $F(a) \equiv F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$

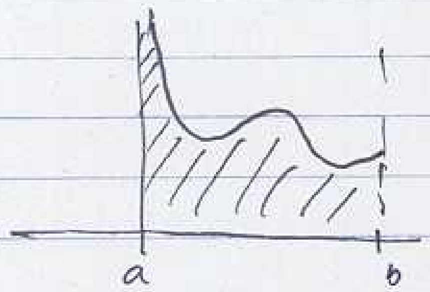
nebo

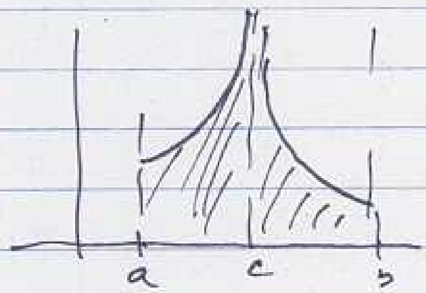
$$F(b) \equiv F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x)$$



b) <u>neomezená funkce f</u>

Primitivní funkce není definována na celém $\langle a,b\rangle$: $\lim\limits_{x \to a+} F(x)$, $\lim\limits_{x \to b-} F(x)$ neexistují (jsou nevlastní)





7.4.3. Nevlastní integrál vlivem meze

Když $f \in W(\langle a,x\rangle)$ pro každé $x > a$ a existuje $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$,

pak číslo (pokud existuje)

$$\lim_{x \to +\infty} [F(x) - F(a)] = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt \overset{\text{ozn.}}{=} \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

se nazývá: ... viz nadpis.

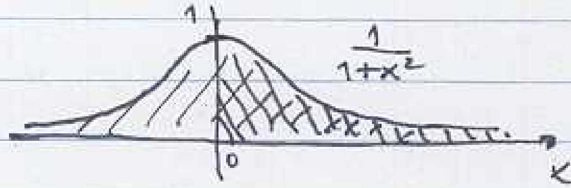
Analogicky:

$$\int_{-\infty}^{b} f(t)\,dt = \lim_{y \to -\infty} \int_y^b f(t)\,dt \;;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to -\infty}} \int_y^x f(t)\,dt \;; \qquad (!\ \text{dvě limity})$$

Pokud některá z těchto limit neexistuje (příp. že nevlastní), pak integrál neexistuje!
Říkáme pak, že nevlastní integrál diverguje.

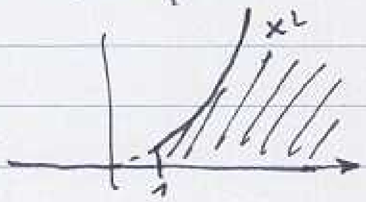
Př.: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0\right] = \frac{\pi}{2}$



$[\operatorname{arctg} t]_y^x$

Př.: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to-\infty}}\int_y^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim\left[\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y\right] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$.

Př.: $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{+\infty} \longrightarrow +\infty$; integrál neexistuje (diverguje)



7.4.4. Nevlastní integrál vlivem funkce,

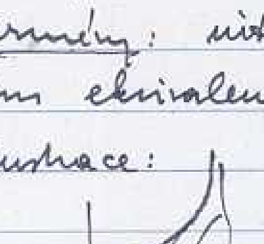
Když $f\in N(\langle a,x\rangle)$ pro každé $x\in\langle a,b)$ avšak $f\notin N(\langle a,b\rangle)$
(tj. rovnost $F'(x)=f(x)$ platí pouze pro $x\in\langle a,b)$),
pak číslo (pokud existuje)

$$\lim_{x\to b-}\left[F(x)-F(a)\right] = \lim_{x\to b-}\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

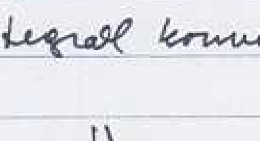
se nazývá: ... viz nadpis.

Termíny: integrál existuje, integrál konverguje jsou ekvivalentní!

Ilustrace:



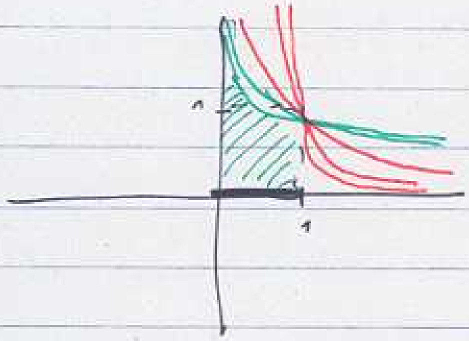
Analogicky:



(7.14)

Př:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \left| \begin{array}{l} \cos x = z \\ -\sin x\,dx = dz \\ \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \to \langle 1, 0 \rangle \end{array} \right| = -\int_1^0 \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{dz}{z} = \Big[\ln|z|\Big]_0^1 = +\underline{\underline{\infty}};$$

Př:
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 2;$$



Př:
$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \dots + \infty$$

Př:
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \dots + \infty$$

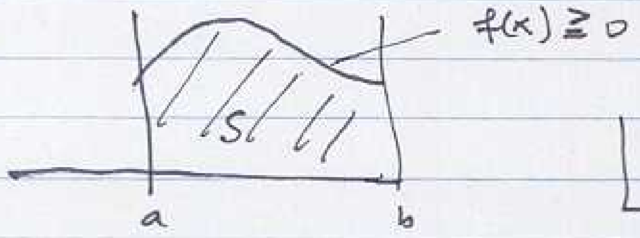
Př:
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big]_0^1 = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}\Big]_0^1 = \frac{3}{2}$$

Př:
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[10]{x}} = \int_0^1 x^{-\frac{1}{10}}\,dx = \frac{x^{\frac{9}{10}}}{\frac{9}{10}}\Big]_0^1 = \frac{10}{9}$$

7.5. Užití integrálu

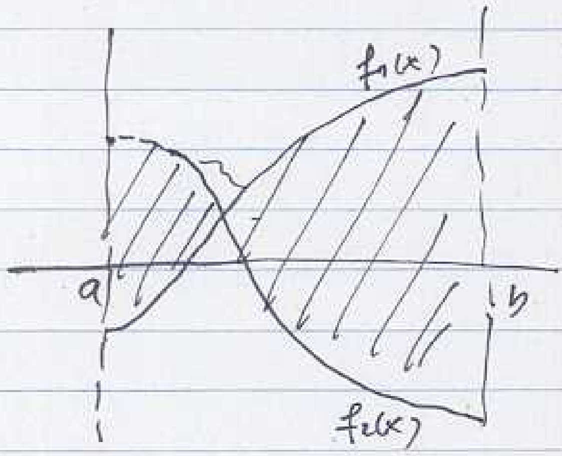
7.5.1. Obsah rovinného obrazce

(a)



$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

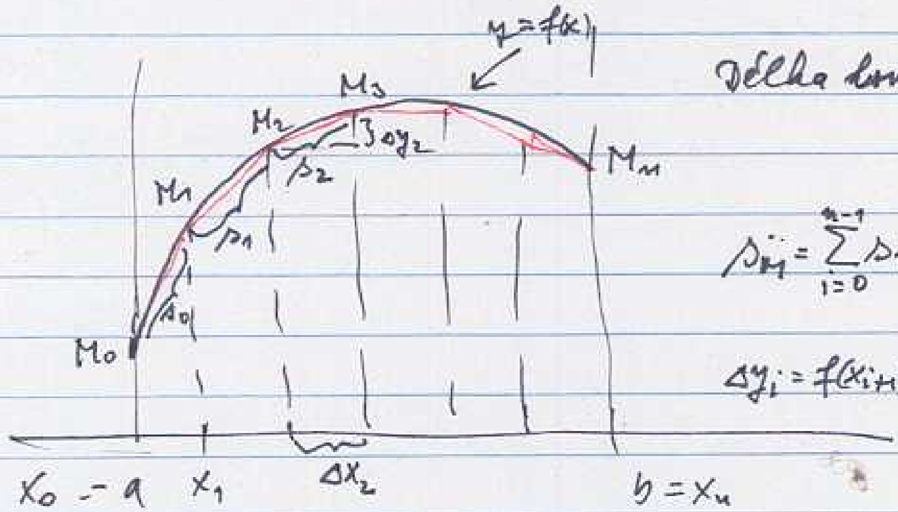
(b)



$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|\,dx$$

7.5.2. Délka oblouku grafu (křivky)

Odvození:



Délka lomené čáry:

$$s_M = \sum_{i=0}^{n-1} s_i = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{M_i M_{i+1}}$$

$$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)\,\Delta x_i$$

$$\overline{M_i M_{i+1}} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{\Delta x_i^2 + f'^2(\xi_i)\,\Delta x_i^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i$$

$$s_M = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i\,;$$ integrální součet pro integrál

$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,\Delta x_i}$$

7.5.3. Práce proměnné síly, hybnost

(a) Jestliže $f(x)$ je síla v místě $x \in \langle a, b\rangle$, pak ~~práce~~ číslo

$$W_i = f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

je práce vykonaná konstantní silou $f(\xi_i)$ na úseku $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$ intervalu $\langle a, b\rangle$.

Integrální součet

$$W_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

je aproximací práce vykonané proměnnou silou f, tj. aproximací čísla

$$W = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

(b) Jestliže $f(t)$ je síla v okamžiku $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$ (časově proměnná síla), pak

$$p = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \lim \sum f(\tau_i)\Delta t_i$$

je hybnost (impuls) ~~práce vykonaná~~ časově proměnné síly v časovém rozmezí $\langle \alpha, \beta\rangle$. Výraz $f(\tau_i)\Delta t_i$ představuje přírůstek hybnosti (impulsu) na časovém úseku $\langle t_i, t_{i+1}\rangle$.

Poznámka: Pokud F $(= -\varphi)$ je primitivní funkce, pak

$$W = F(b) - F(a) = [-\varphi(b) - (-\varphi(a))] = \varphi(a) - \varphi(b)$$

a práci lze pak vyjádřit jako rozdíl potenciálů resp. rozdíl potenciálních energií.

7.5.4. Jednoduchý tvar pohybového zákona

1. Změna hybnosti na úseku $\langle t_i, t_{i+1} \rangle$ se rovná impulsu síly na tomto úseku

$$\Delta p_i = (m_{i+1} v_{i+1} - m_i v_i) = \Delta (mv)_i = f(\tau_i)\Delta t_i$$

2. Celková změna hybnosti na $\langle \alpha, \beta \rangle$:

$$p(\beta) - p(\alpha) = \lim \sum_i f(\tau_i)\Delta t_i = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

tj.: $$m(\beta)v(\beta) - m(\alpha)v(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$$

3. Změna hybnosti v časovém úseku $\langle \alpha, t \rangle$

$$m(t)v(t) - m(\alpha)v(\alpha) = \int_\alpha^t f(\tau)\,d\tau$$

Odtud dostaneme

$$\frac{d}{dt}\left[m(t)v(t)\right] = f(t) \quad , \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle \quad ;$$

a to je tzv. <u>diferenciální tvar pohybového zákona</u>

Př: <u>Zákon padajícího tělesa</u> (v gravit. poli):

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \quad ;$$ k .. koeficient odporu prostředí

Př: <u>Zákon pohybující se rakety</u> (kolmo k povrchu Země)

$$\frac{d}{dt}\left[M(t)v(t)\right] = F - M(t)g \quad ;$$

F – konstantní tažná síla

$M(t) = M_0 - rt$ .. okamžitá hmotnost

r – koeficient „hoření" paliva