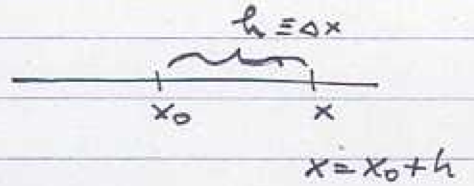
6. Základy diferenciálního počtu

6.1. Diference, diferenciál, derivace

6.1.1. Diference argumentu a diference funkce v bodě

Označme

$$x - x_0 = \Delta x = h$$

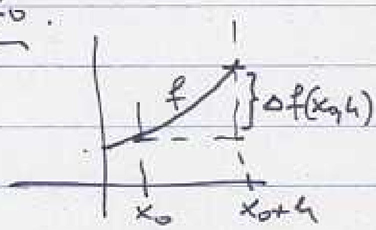


diferenci argumentu.

Pro funkci $f: D(f) \to R$ a vnitřní bod $x_0 \in D(f)$ a libovolný bod $x \in U_\delta(x_0)$ definujeme novou funkci proměnné h vztahem

$$\Delta f(x_0, h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \equiv f(x) - f(x_0)$$

a nazýváme ji 1. diference funkce f v bodě x_0.



Př: $f(x) = \frac{1}{x}$; $\Delta f(x_0,h) = \frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0} = \frac{-h}{x_0(x_0+h)}$;

Př: $f(x) = x^2$;
$$\Delta f(x_0,h) = (x_0+h)^2 - x_0^2 = 2x_0 h + h^2;$$

Př: $f(x) = \sin x$;
$$\Delta f(x_0,h) = \sin(x_0+h) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2};$$

Př: $f(x) = x^3$;
$$\Delta f(x_0,h) = (x_0+h)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3;$$

Př: $f(x) = x^n$;
$$\Delta f(x_0,h) = (x_0+h)^n - x_0^n = \dots\dots = n x_0^{n-1} + \binom{n}{2} x_0^{n-2} h^2 + \dots + h^n;$$

Př: $f(x) = e^x$
$$\Delta f(x_0,h) = e^{x_0+h} - e^{x_0} = (e^h - 1)e^{x_0};$$

Př: $f(x) = \ln x$; $\Delta f(x_0,h) = \ln(x_0+h) - \ln x_0 = \ln\frac{x_0+h}{x_0}$;

6.1.2. Poměrná diference a derivace funkce v bodě

[uvědomme si, že hovoříme opět o lokálních charakteristikách funkce; a tedy o lokálních vlastnostech funkcí]

Poměrnou diferenci funkce f v bodě x_0 definujeme vztahem

$$\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Existuje-li

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

říkáme, že funkce je derivovatelná v bodě x_0 (má derivaci) a tuto limitu nazýváme derivace funkce f v bodě x_0 a značíme

$$f'(x_0) \quad \text{,resp.} \quad f'\big|_{x=x_0}.$$

Př: $f(x)=\frac{1}{x}$;
$$\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} = \frac{-\frac{h}{x_0(x_0+h)}}{h} = -\frac{1}{x_0(x_0+h)}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{1}{x_0(x_0+h)}\right] = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Př: $f(x)=x^2$;
$$\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} = \frac{2x_0h+h^2}{h} = 2x_0+h$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left[2x_0+h\right] = 2x_0$$

Př: $f(x)=\sin x$;
$$\frac{\Delta f(x_0,h)}{h} = \frac{2\cos(x_0+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos(x_0+\tfrac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$f'(x_0) = \cos x_0$$

Př: $f(x)=e^x$; $\quad \frac{\Delta f}{h} = \frac{(e^h-1)e^{x_0}}{h}$, $\quad f'(x_0) = e^{x_0}$.

6.1.3. Fyzikální a geometrický význam derivace (funkce) v bodě.

Diference funkce v bodě x_0 představuje absolutní změnu (funkce) na intervalu $\langle x_0, x_0+h \rangle$

Poměrná diference funkce v bodě x_0 představuje relativní změnu funkce na intervalu $\langle x_0, x_0+h \rangle$ nebo směrnici sečny grafu funkce → viz obrázek

Derivace funkce v bodě x_0 představuje lokální (bodovou, okamžitou) změnu funkce v bodě x_0 nebo směrnici tečny grafu funkce v bodě x_0 → viz obrázek

Př: Mějme funkci

$$q : t \to q(t) \ ,$$

která popisuje množství (el.) náboje proteklého řezem vodiče v ~~čase~~ okamžiku t (čas)

$q(t_0+\Delta t) - q(t_0)$ — změna toku náboje

$\dfrac{q(t_0+\Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}$ — průměrná (relativní) změna toku náboje (za jednotku času)

$q'(t_0)$ — okamžitá změna toku náboje v bodě t_0

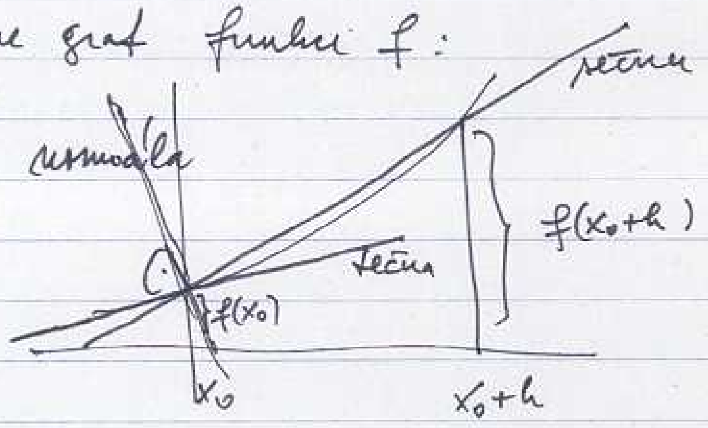
$\to q'(t) \overset{\text{def.}}{=} i(t_0)$: okamžitý tok = proud

Př.: Mějme funkci $s : t \to s(t)$: délka dráhy v závislosti na čase

$\dfrac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$ ... průměrná rychlost na úseku $\langle t_0, t_0+\Delta t \rangle$

$s'(t_0) \overset{\text{def.}}{=} v(t_0)$ .. okamžitá rychlost

Př: Mějme graf funkce f:



Směrnice sečny: $k = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Směrnice tečny: „limitní poloha systému sečen": $k = f'(x_0)$

<u>Rovnice tečny</u>: $y - y_0 = k(x - x_0)$, $k = f'(x_0)$, $y_0 = f(x_0)$;

↳ ke grafu funkce f v bodě x_0;

<u>Rovnice normály</u> (ke grafu funkce f v bodě x_0;

↳ normála je přímka kolmá k tečně (v bodě x_0);

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)\,; \quad k = f'(x_0) \text{ – směrnice tečny}$$

6.1.4. Diferenciál funkce f v bodě x_0

<u>Diferenciál</u> derivovatelné funkce f v bodě x_0 definujeme vztahem

$$\boxed{df(x_0, h) = f'(x_0)\cdot h},$$

Je to lineární funkce v proměnné h.

Př: Pro $f(x) = x^2$;

$$df(x_0,h) = 2x_0 \cdot h \,. \quad (\equiv dx^2|_{x_0}$$

Př: Pro $f(x) = \sin x$:

$$df(x_0,h) = \cos x_0 \cdot h \quad (\equiv d\sin x|_{x_0})$$

Př. Pro $f(x) = x$

$$df(x_0,h) = 1 \cdot h = h \quad (\equiv dx|_{x_0}) \;!!$$

Proto píšeme: $\boxed{h = dx} = \Delta x$

Pomocí diferenciálu lze vyjádřit diferenci:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)h}_{df(x_0,h)} + \omega(h),$$

kde $\omega(h)$ je jistá „zbytková" funkce proměnné h, pro kterou musí platit

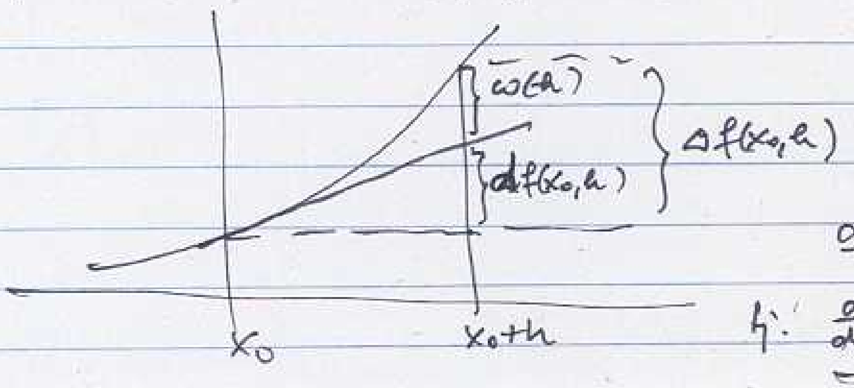
$$\lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0$$

neboť musí být

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h}$$

Když existuje derivace $f'(x_0)$ (tj. funkce f je derivovatelná) pak existuje diferenciál (tj. funkce f je diferencovatelná)

!



$$\frac{df(x_0,h)}{h} = f'(x_0)$$

tj. $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = f'(x_0)$

6.1.5. Spojitost a diferencovatelnost

Je-li funkce f v bodě x_0 diferencovatelná, potom je v bodě x_0 spojitá. [Obrácení tvrzení neplatí!!]

Dk: Diferencovatelnost znamená, že

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \omega(h)$$

Pro $h \to 0$ je $\left.\begin{array}{l} f'(x_0)h \to 0 \\ \omega(h) \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0$

spojitost.

Př: Pro funkci $f(x) = |x|$:

$$f'(x_0+) = \lim_{h\to 0+} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} \overset{x_0=0}{=\!=} \lim_{h\to 0+} \frac{|h|-|0|}{h} = 1;$$

$$f'(0-) = \lim_{h\to 0-} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1.$$

$f'(0)$ neexistuje!

6.2. ~~Pravidla~~ Pravidla diferenciálního počtu

6.2.1. Pravidla derivování a diferencování

Derivování $\equiv$ určování derivace

Diferencování $\equiv$ určování diferenciálu

Nechť funkce f a g jsou diferencovatelné v bodě x_0 $(x_0 \in D(f), x_0 \in D(g))$. Potom v tomto bodě jsou diferencovatelné i funkce

$cf, \ f \pm g, \ f \cdot g, \ \frac{f}{g} \ (g \neq 0)$

a platí (stručné zápisy)

$(cf)' = cf', \ c \in R$	$d(cf) = c\,df$
$(f \pm g)' = f' \pm g'$,	$d(f+g) = df + dg$
$(f \cdot g)' = f'g + fg'$,	$d(fg) = g\,df + f\,dg$
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$,	$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$,

!! Teoretická otázka u zkoušky: Odvodit tato pravidla!

6.2.2. Derivace a diferenciál složené funkce (kompozice funkcí)

Je-li $F = g \circ f = g(f(x))$ ~~ale~~ kompozice funkcí

a existují derivace $f'(x_0)$, $g'(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$

potom existuje derivace

$$F'(x_0) = [g(f(x_0))]'$$

$$\boxed{\left.\frac{dF}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dg}{dy}\right|_{y_0} \cdot \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}}$$

a platí

$$F'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

$$dF(x_0, h) = d\,g(f(x))\big|_{x_0} = g'(y_0)\, f'(x_0)\, dx$$

! Pozn.: Kdo chce za „1" musí umět tento vzorec odvodit.

Př: $F(x) = \sin(\underbrace{\cos x}_{y})$: $F'(x) = (\sin y)' \cdot (\cos x)' =$

$= \cos y\,(-\sin x) = [\cos(\cos x)] \cdot (-\sin x)$.

$x = x_0$.

Př: $F(x) = e^{x^2}$; $F'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

.... atd: procvičit doma! popř. SDP

6.2.3. Derivace inverzní funkce

Jsou-li $f: I \xrightarrow{na} H$, $f^{-1}: H \xrightarrow{na} I$

navzájem inverzní diferencovatelné funkce, tj.

$$y = f(x), x \in I \quad , \quad x = f^{-1}(y), y \in H$$

potom platí

$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{[f(x)]'}$$

Pozn.: Odvození: $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$

$$x = f^{-1}(y), \quad x_0 = f^{-1}(y_0)$$

Pak
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} \quad ;$$

když $x \to x_0$ a funkce f je spojitá, pak $f(x) \to f(x_0)$
tj. $y \to y_0$;

Existuje-li

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} \quad ; \qquad \text{Q.E.D.}$$

Př.: $(\ln x)' = \dots = \frac{1}{x}$

6.2.4. Derivace elementárních funkcí – základní vzorce

viz – každá učebnice dif. počtu (i středoškolská)
– www

6.2.5. Funkce f'

Mějme diferencovatelnou funkci $f: D(f) \to R$.
Funkce, která každému $\bar{x} \in D(f)$ přiřazuje číslo $f'(\bar{x})$
se nazývá derivace funkce f; a značí se:

$$f': D(f') \to R. \qquad D(f') = \text{zjednodušit}$$

6.3. Důležité poznatky diferenciálního počtu

6.3.1. Lokální a globální extrémy

Bod $\hat{x} \in D(f)$ je bodem globálního minima funkce f, platí-li

$$f(\hat{x}) \leq f(x)\,,\ \forall x \in D(f)\,;$$

Jestliže platí

$$f(\hat{x}) < f(x)\,,\ \forall x \in D(f)\,,\ x \neq \hat{x}\,,$$

pak $\hat{x}$ je bodem ostrého lokálního minima.

Číslo $f(\hat{x})$ je globálním minimem (ostrým, neostrým).

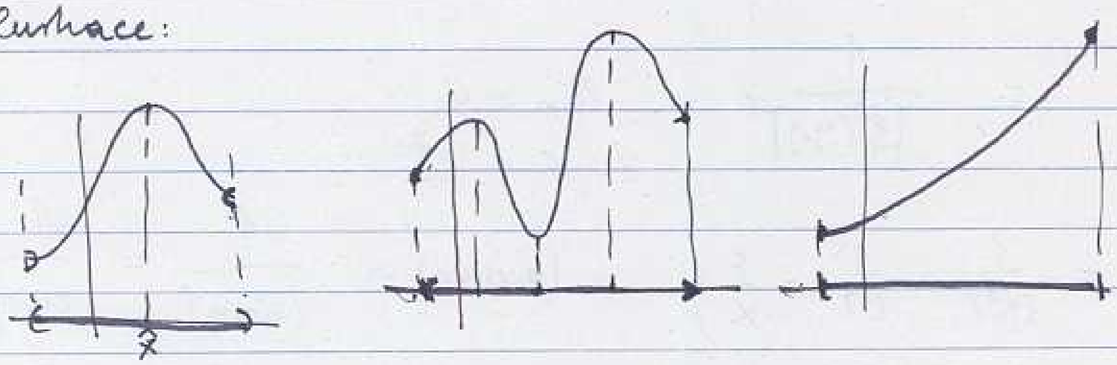
Analogicky – pro globální maximum.

Bod $\hat{x} \in D(f)$ je bodem lokálního minima, existuje-li okolí $U_\delta(\hat{x})$ takové, že

$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in U_\delta(\hat{x}) \cap D(f)\,;$$

analogicky – pro: ostré lok. minimum
lok. maximum
lok. ostré maximum.

Ilustrace:



6.3.2. Existence extrému

(A) Podmínka (postačující) existence globálního extrému:
- odst. 5.2.2, (C): důsledek globální spojitosti funkce f na uzavřeném intervalu (množinově-spojité)

(B) Nutná podmínka existence lokálního extrému:
(Fermatova věta)

(C) Další podmínky později

6.3.3. Fermatova věta (další pojmy)

Nechť funkce f má v bodě $\hat{x} \in U_\delta(\hat{x})$ derivaci (oboustrannou), a nechť f v tomto (vnitřním) bodě $D(f)$ nabývá svého lokálního minima / maxima, tj.

$$f(\hat{x}) \; \substack{\le \\ \ge} \; f(x), \forall x \in U_\delta(\hat{x}) .$$

$\Big\} V_1$

Potom $$f'(\hat{x}) = 0 .$$ $\Big\} V_2$

Logické schéma věty: $V_1 \Rightarrow V_2$; V_2 je tedy nutná podmínka pro V_2 (tj. pro existenci extrému)

Zdůvodnění:

Rozepsáním předpokladů máme: $\dfrac{f(x)-f(\hat{x})}{x-\hat{x}} \ge 0$ pro $x \in (\hat{x}, \hat{x}+\delta)$: tj. $x > \hat{x}$

$$\frac{f(x)-f(\hat{x})}{x-\hat{x}} \le 0 \quad \text{pro } x \in (\hat{x}-\delta, \hat{x}) : \; x < \hat{x} .$$

Limitováním $x \to \hat{x}$ se nerovnosti „zachovají" (viz věty o nerovnostech); takže:

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'(\hat{x}+) \ge 0 \\ f'(\hat{x}-) \le 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(\hat{x}) = 0 .$$

6.3.4 Základní optimalizační úlohy

(1) úloha na lok. extrém: Dána fce f: najdi hodnotu $f(\hat{x})$ (a okolí $U_\delta(\hat{x})$):
$$f(\hat{x}) \le f(x) \quad \forall x \in U_\delta(\hat{x}) \cap D(f)$$

(2) úloha na globální extrém: Dána $f: \langle a,b \rangle \to R$: najdi $f(\hat{x})$:
$$f(\hat{x}) \le f(x) \quad \forall x \in \langle a,b \rangle$$

(3) úloha na stacionární bod: Dána $f: \dots$, najdi $\hat{x} \in U_\delta(\hat{x})$: $f'(\hat{x}) = 0$.

(6.11)

6.3.5 Věta o střední hodnotě — motivace obrázkem

Předpokládáme, že funkce f

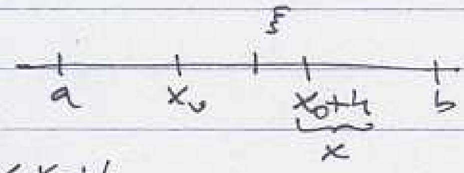
1. je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$,
2. je diferencovatelná v každém vnitřním bodě intervalu $\langle a,b\rangle$, tj. na (a,b).

Potom existuje $\xi \in (a,b)$ (aspoň jedno) takové, že platí

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Zdůvodnění obrázkem: (předloženo k úvaze)

Důsledek 1: Pro $x_0, x_0+h \in (a,b)$: píšeme (adaptujeme tvrzení uvedené výše)



$$f(x_0+h)-f(x_0) = f'(\xi)\cdot h \quad , x_0<\xi<x_0+h$$

resp.

$$f(x)-f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0) \; ;$$

Důsledek 2: (je důsledkem D1 a vlastností diferenciálu)

$$f(x_0+h)-f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)h}_{df(x_0,h)} + \omega(h) ; \quad \frac{\omega(h)}{h} \to 0$$

$\Rightarrow$

$$\cancel{df(x_0,h) = f'(\xi)h}$$

$$\boxed{f'(\xi)h = f'(x_0)h + \omega(h)}$$

Důsledek 3. Nechť funkce f je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a diferencovatelná na (a,b).

Když $\forall x\in(a,b)$ je $f'(x) \neq 0$ $\begin{cases} f'(x)>0, \\ f'(x)<0 \end{cases}$

potom funkce f je na $\langle a,b\rangle$ ~~prostá~~ ryze monotónní $\begin{cases} \text{rostoucí (ostře)} \\ \text{klesající (ostře)} \end{cases}$

[monotonie na intervalu]

Zdůvodnění: Z předpokladu: $\forall x_1,x_2 \in \langle a,b\rangle : f(x_1)-f(x_2) = f'(\xi)(x_1-x_2)$
a pro $f'(x)>0$: $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ ... roste;
... atd.

Poznámka k důsledku 3: Když $f'(x)>0$ (resp. $f'(x)<0$) platí pouze pro $x\in I$, $I\subset\langle a,b\rangle$, říkáme, že I je <u>interval monotónie</u> (interval růstu, interval klesání)

– často si klademe za cíl, <u>určit</u> intervaly monotónie

<u>Důsledek 4</u>: nechť předpoklady věty o střední hodnotě splňují funkce f a g (a Důsledek 1)
Potom $\exists\,\xi: x_0<\xi<x_0+h$:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

Pozor! mylný důsledek je, že $\exists\,\xi_1,\xi_2$: $\dots=\dfrac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$;

<u>Důsledek 5</u> (je důsledkem 4) [<u>l'Hospitalovo pravidlo</u>]

$$\left.\begin{array}{l}\lim f(x)=0\\ \lim g(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)},$$ pokud existuje <u>limita</u>

Základní podoby pravidla — viz SDP ...
Zdůvodnění ve všech variantách je <u>složité</u>!
— vlastně se předkládá k víře

6.3.6
<u>~~V.B.~~ (Monotonie v bodě</u> [Postačující podmínka (ostré) monotónie v bodě]
Když funkce $f: I\to R$ má derivaci v bodě $\hat{x}\in I$ a je $f'(\hat{x})>0$ [$f'(\hat{x})<0$], potom funkce f <u>v bodě $\hat{x}$</u> ostře roste [ostře klesá]

Zdůvodnění:

$$f'(\hat{x})>0\Rightarrow\frac{f(x)-f(\hat{x})}{x-\hat{x}}>0,\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)>f(\hat{x}) \text{ pro } x>\hat{x} \dots$$

Poznámka: <u>Růst v bodě $\hat{x}$</u> znamená, že $\exists$ okolí bodu $\hat{x}$, že
$f(\hat{x})<f(x)$, $x\in(\hat{x},\hat{x}+\delta)$
$f(x)<f(\hat{x})$, $x\in(x_0-\delta,\hat{x})$

6.4. Elementární optimalizační úlohy

~~6.3.1. Příklady~~

6.4.1. Příklad

a) Je dána funkce f předpisem: $f(x) = e^{|x|}$.

Stanovme extrémy:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x}, & x \geq 0 \\ e^{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x}, & x > 0 \quad (!) \\ -e^{-x}, & x < 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} f'(0+) &= 1 \\ f'(0-) &= -1 \end{aligned} \quad !$$

Intervaly monotónie:

$f'(x) > 0$: $\quad e^{x} > 0$ pro $x > 0 \implies f$ roste

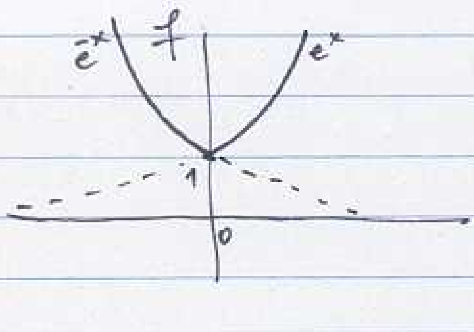
$-e^{-x}$ nemůže být kladné

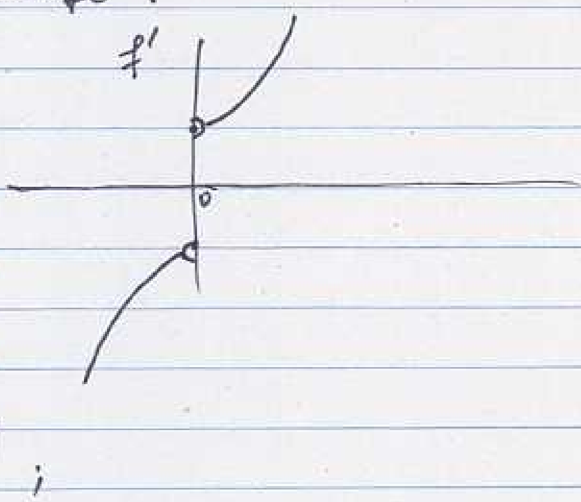
$f'(x) < 0$: $\quad e^{x}$ nemůže být záporné

$-e^{-x} < 0$, $x < 0 \implies f$ klesá

$\implies$ v bodě $\hat{x} = 0$ je minimum: $\min\limits_{R} f(x) = f(0) = e^{0} = \underline{\underline{1}}$

! v bodě $\hat{x}$ derivace neexistuje.





b) ... $f(x) = e^{-|x|}$;

c) --- $f(x) = e^{|-x|}$;

d) -- $f(x) = |e^{x}|$

e) $f(x) = |e^{-x}|$

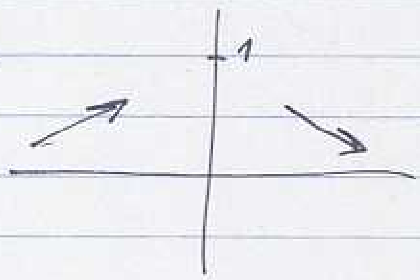
[6.4.2] a) Stanovte všechny lokální a globální extrémy funkce f : $f(x) = \sin x$, $x \in R$

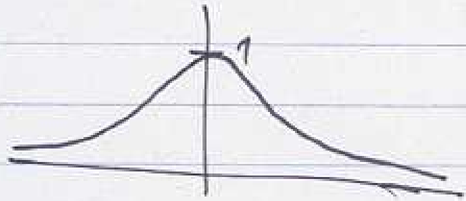
b) Řešte optimalizační úlohu pro funkci $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $x \in R$; funkce je hladká

stac. body:
růst
klesání

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \begin{cases} > 0, & x < 0 \\ = 0, & \text{pro } x = 0 \\ < 0, & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

$\underline{f(0) = 1}$





$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = 0$

c) . . . $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in R$

6.5. Potenciál funkce a metody jeho určování

6.5.1. Definice

a) Je dána funkce $f: I \to R$ ($I \subset R$ je interval).
Funkce $F: I \to R$, pro kterou platí

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \quad \Big| \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

se nazývá **primitivní funkce** k funkci f na intervalu I

b) Funkce $-F(x) = \varphi(x)$ se (obvykle) nazývá **potenciál funkce f**.

Př: $f(x) = x^2 - \cos x$, $x \in R$

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \sin x$; nebo $F(x) = \frac{x^3}{3} - \sin x + 128$;

6.5.2. Vlastnosti primitivní funkce

Nechť funkce F je primitivní k funkci f na I:

1. Potom každá funkce $F+C$ (C je konst.) je primitivní k f na I.
2. Funkce F je spojitá na I. (!)
3. Pro libovolný bod $x_0 \in I$ a lib. číslo $y_0 \in R$ existuje **právě jedna** primitivní funkce, jejíž graf prochází bodem (x_0, y_0).

Důkazy: 1) zřejmé:

2) F má derivaci $F'(x) = f(x)$ v každém bodě $\Rightarrow$ je spojitá

3) Pro libovolnou primitivní funkci $F(x)+C$ vybereme C tak, aby platilo

$$y_0 = F(x_0) + C$$

$\Rightarrow C = y_0 - F(x_0)$ -- C je určena jednoznačně

$\Rightarrow$ funkce: $\underline{G(x) = F(x) - F(x_0) + y_0}$ je tou jedinou primitivní funkcí

6.5.3. Homogenita a aditivita

(A) Je-li $F'(x) = f(x)$, potom

$$(\alpha F(x))' = \alpha F'(x) = \alpha f(x)$$

tj. αF je primitivní k αf

(B) Je-li $\left.\begin{array}{l} F_1'(x) = f_1(x) \\ F_2'(x) = f_2(x) \end{array}\right\} \Rightarrow [F_1(x) + F_2(x)]' = F_1' + F_2' = f_1(x) + f_2(x)$

tj. $F_1(x) + F_2(x)$ je primitivní k funkci $f_1(x) + f_2(x)$

6.5.4. Neurčitý integrál

Pro systém primitivních funkcí

Obrázek

$$F(x) + C$$

k funkci $f(x)$ (na intervalu I)

zavedeme novou značku:

integrační proměnná

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx$$

integrand

znak „antiderivování"

$\int f(x)dx$ „antiderivujte funkci $f(x)$"

Př: Planovnat diferenciál funkce F:

$$dF(x,h) = F'(x)h \equiv F'(x)dx = f(x)dx$$

$$\Rightarrow d\left(F(x) + C\right) = f(x)dx$$

$$\Rightarrow \boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx}\ !$$

6.5.5. Zápisy „fajfkovádlu"

<u>Homogenita</u> (6.5.3.(A)): $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$

<u>Aditivita</u> (6.5.3 (B)): $\int [f_1(x)+f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$

~~Př.:~~

<u>Soubor vzorců:</u>

1. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1,$ $\begin{cases} x\in(-\infty,+\infty), & \text{pro } \alpha \text{ celé nezáporné} \\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty) & \text{pro } \alpha \text{ celé záporné} \\ x\in(0,+\infty) & \text{pro } \alpha \text{ necelé} \end{cases}$

   $\longrightarrow \int 0^\alpha \cdot dx = C$;

2. $\int x^{-1}\,dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C,$ $\begin{cases} \ln x + C, & x>0, \\ \ln(-x)+C, & x<0 \end{cases}$.

3. $\int e^x\,dx = e^x + C, \quad x\in R,$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad x \in R,$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C, \quad x\in R,$

6. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2},$

7. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C, \quad x \neq k\pi,$

8. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad x\in(-1,1),$

9. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C, \quad x\in R,$

10. $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C, \quad x \in R,$

11. $\int \cosh\,dx = \sinh x + C, \quad x\in R,$

12. $\int a^x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad x \in R, \quad a>0, \quad a \neq 1,$

13. $\int \dfrac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C, \quad x \in R$

14. $\int \dfrac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{cotgh} x + C, \quad x \in (-\infty,0)\cup(0,+\infty),$

15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{argcosh} |x| + C = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C,$

$\operatorname{argcosh} x, x>0 ; \quad \operatorname{argcosh}(-x), x<0 \qquad x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty),$

16. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{argsinh} x + C = \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C, \quad x \in R,$

17. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \operatorname{argtgh} x + C, & x \in (-1,1), \\ \operatorname{argcotgh} x + C, & x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \end{cases}$

6.5.6. Základní úlohy → metody: viz dále

→ určování primitivní funkce ≡ ≡ „metody ~~integrace~~ integrování"

! Poznámka o řešitelnosti těchto úloh:

Úloha 1: Je dána funkce $f: I \to R$.
Najít funkci $F: I \to R$ takovou, že platí

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I .$$

Úloha 2: Je dána funkce $f: I \to R$ a čísla $x_0 \in I$, $y_0 \in R$.
Najít funkci $F: I \to R$ takovou, že platí

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I, \quad F(x_0) = y_0 .$$

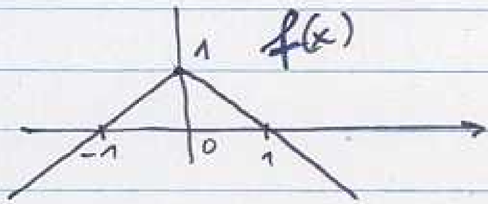
Úloha 3: Je dána funkce $f: I \to R$.
Najít spojitou funkci $F: I \to R$ takovou, že platí
$F'(x) = f(x)$ s výjimkou nejvýše spočetně mnoha $x \in I$.

Úloha 4: Je dána funkce $f: I \to R$ a čísla $x_0 \in I$, $y_0 \in R$.
Najít řešení úlohy 3, pro které platí $F(x_0) = y_0$.

Př: Dána: $f(x) = 1 - |x|$; urči $\int [1-|x|]\,dx = F(x) + C$;

Úloha 1:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \geq 0 \\ 1 + x, & x < 0 \end{cases}$$

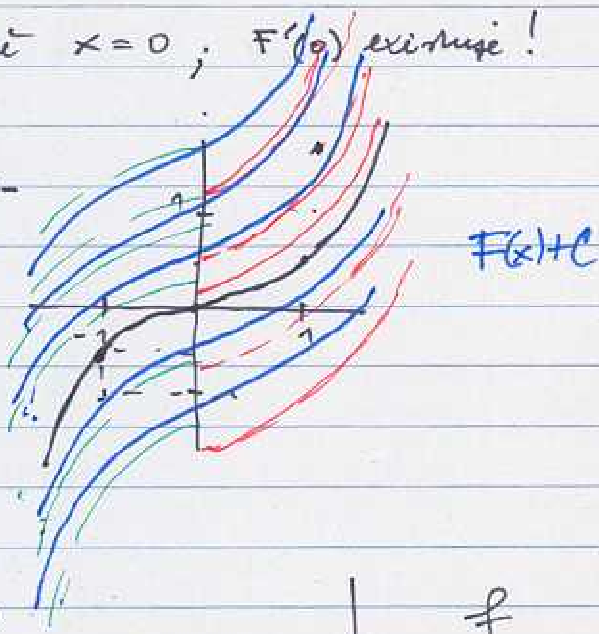


$$F(x) + C = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2} + C_1, & x \geq 0 \\ x + \frac{x^2}{2} + C_2, & x < 0 \end{cases}$$

Podmínka spojitosti $F(x)+C$ v bodě $x = 0$; $F'(0)$ existuje!

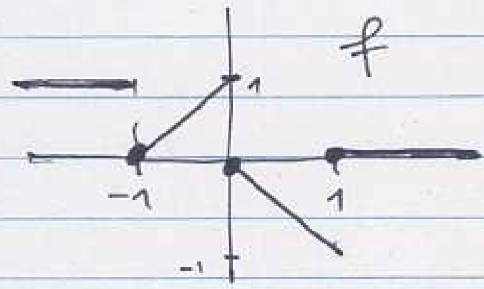
$$\left(x - \frac{x^2}{2} + C_1\right)_{0+} = \left(x + \frac{x^2}{2} + C_2\right)_{0-}$$

$$C_1 = C_2 \overset{\text{ozn.}}{=} C$$



Př: Dána:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1, \\ x + 1, & x \in \langle -1, 0), \\ -x, & x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$



Úloha 3

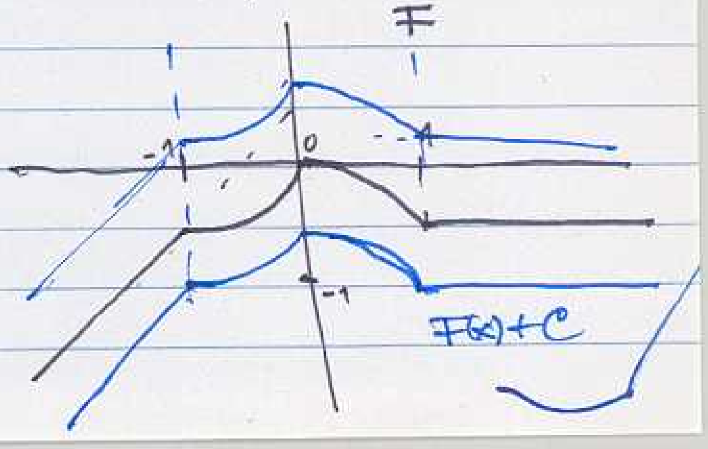
urči $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

$$F(x) + C = \begin{cases} x + C_1 \\ \frac{x^2}{2} + x + C_2 \\ -\frac{x^2}{2} + C_3, \\ C_4 \end{cases}$$

$F'(x)$ neexistuje v bodech:
$x = -1, 0, 1$;
v těchto bodech požadujeme spojitost $F(x)$:

$(x + C_1)_{x=-1-} = \left(\frac{x^2}{2} + x + C_2\right)_{x=-1+}$	$-1 + C_1 = \frac{1}{2} - 1 + C_2$
$\left(\frac{x^2}{2} + x + C_2\right)_{x=0-} = \left(-\frac{x^2}{2} + C_3\right)_{x=0+}$	$C_2 = C_3 \overset{\text{ozn.}}{=} C$
$\left(-\frac{x^2}{2} + C_3\right)_{x=1-} = C_4 \big\rvert_{x=1+}$	$-\frac{1}{2} + C_3 = C_4$

$C_1 = \frac{1}{2} + C$
$C_2 = C_3 = C$
$C_4 = -\frac{1}{2} + C$



Poznámka k příkladům: K výpočtům není „fajfkování" zapotřebí !!

6.5.7. Metoda integrování: využití derivace složené funkce

Mějme diferencovatelnou složenou funkci

$$F(x) = G(f(x)) \quad ; \quad z = f(x), \quad x \in I$$

$$F'(x) = \frac{dG}{dz}\cdot\frac{df}{dx}.$$

Je-li $G(z)$ primitivní ke $g(z)$, tj. $G'(z) = g(z)$, pak

$$F'(x) = g(f(x))\, f'(x)$$

$$F'(x)dx = \underbrace{g(f(x))}_{g(z)}\ \underbrace{f'(x)dx}_{dz}$$

a následující zápisy jsou proto ekvivalentní:

$$\boxed{F(x)+C = G(f(x))+C = \int F'(x)dx = \int g(f(x))f'(x)dx = \int g(z)dz}$$

$$z = f(x)$$

Př: metodou $\int \sin^7 x \cos x\, dx = \begin{vmatrix} z = \sin x \\ dz = \cos x\, dx \end{vmatrix} = \int z^7 dz = \frac{z^{7+1}}{7+1} = \frac{\sin^8 x}{8} + C$

Př: metodou: $\int e^{-t} dt = -e^{-t} + C$; $\begin{vmatrix} x = -t \\ dx = -dt \end{vmatrix} = \int e^{x}(-dx) = -e^{x}$;

Př: $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$; $x \in \langle -1, 1 \rangle$; $= \begin{vmatrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \end{vmatrix} = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt =$

$$= \int |\cos t| \cos t\, dt = \begin{cases} \int \cos^2 t\, dt, & t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ -\int \cos^2 t\, dt, & t \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle \rightarrow \text{D.C.} \end{cases}$$

$$\int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} 2 \sin t \cos t = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C;$$

6.5.8. Metoda integrování: využití derivace součinu

— a primitivní funkce k součtu funkcí - aditivita - odd. 6.5.5

Mějme diferencovatelné funkce: $u = u(x)$, $v = v(x)$, $x \in I$; víme, že

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \quad x \in I$$

$$\Rightarrow \quad \int [uv]' dx = \int u'v\, dx + \int uv'\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int u'v\, dx = u(x)v(x) - \int uv'\, dx}$$

Užití: — Převod složitějšího případu na jednodušší
— převod jednoduššího případu na složitější } kvalifikace!

Př: $\int xe^x dx = \begin{vmatrix} x = v, & 1 = v' \\ e^x = u', & e^x = u \end{vmatrix} = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = \underline{xe^x - e^x + C}$

$$\int xe^x = \begin{vmatrix} x = u', & \frac{x^2}{2} = u \\ e^x = v, & e^x = v' \end{vmatrix} = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x = \dots\dots$$

Typy výrazů $u'v$, pro které je uvedený postup použitelný:

$x^n e^x$, $x^n e^{ax}$, $x^n \cos\omega x$, $x^n \sin\omega x$,

$e^{ax}\cos\omega x$, $e^{ax}\sin\omega x$

$x^n \arcsin x$, $x^n \arccos x$, $x^n \ln x$, $x^n \operatorname{arctg} x$, $x^n \operatorname{arccotg} x$

6.5.9. Metoda integrování: Rozklad na parciální zlomky,

! Rozklad není metoda integrování; je to převod na jednodušší funkce, pro něž již umíme užít vhodný vzorec!!

K nalezení primitivní funkce k funkci dané předpisem

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy, $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, rozložíme racionální výraz $R(x)$ na součet základních výrazů

I. $\dfrac{A}{x-x_0}$, A, x_0 jsou (dané) konstanty (čísla),

II. $\dfrac{A}{(x-x_0)^k}$, $A, x_0, k \in N, k \geqq 2$ jsou daná čísla,

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, A, B, p, q jsou daná čísla, kořeny jmenovatele jsou imaginární,

IV. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, —"—, $k \in N, k \geqq 2$.

1. $\int \frac{A}{x-x_0}\,dx = A \ln|x-x_0| + C$

2. $\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,dx = \frac{A}{1-k}\,\frac{1}{(x-x_0)^{k-1}} + C$

3. $\longrightarrow$ .. viz SDP

4. $\longrightarrow$ budoucí FEL inženýr se bez toho obejde.

6.5.10. Metoda integrování: Univerzální substituce.

Pro $$\int R(\sin x, \cos x)\,dx$$

se volí substituce: $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $x = 2\operatorname{arctg} t$

$$\Rightarrow \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

nebo speciálnější substituce:

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t,$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$\longrightarrow$ převod na typ z odst. 6.5.9.

Př: $$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

6.5.11. Metoda integrování: Goniometrické substituce.

Pro $$\int R\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

se volí: $x = \sin t$ nebo $x = \cos t$

Př: $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t}{|\cos t|}\,dt =$$

$$= \begin{cases} \int dt = t + C = \arcsin x + C \\ \ldots ? \qquad \text{D.C.} \end{cases}$$