5. Spojité a nespojité funkce

5.1. Limita funkce

5.1.1. Ilustrace lokálního chování funkcí

Okolí bodu $x_0 \in R$: $U_\delta(x_0) = \{x \in R : |x - x_0| < \delta\} \equiv$

$$\equiv \{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} \equiv (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

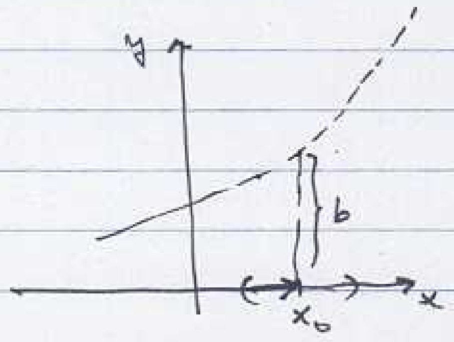
Chyby

Prstencové okolí bodu $x_0 \in R$: $P_\delta(x_0) = U_\delta(x_0) - \{x_0\} = (x_0 - \delta, \overset{x_0}{\cancel{\emptyset}}) \cup (\overset{x_0}{\cancel{\emptyset}}, x_0 + \delta)$
[„okolí bodu bez bodu"]

Pravostranné okolí bodu $x_0 \in R$: $U_\delta^+(x_0) = \{x \in R, \overset{x_0}{\cancel{\emptyset}} \le x < x_0 + \delta\} = \langle \overset{x_0}{\cancel{\emptyset}}, x_0 + \delta)$

Levostranné okolí bodu $x_0 \in R$: $U_\delta^-(x_0) = \{x \in R, x_0 - \delta < x \le \underset{x_0}{\cancel{\emptyset}}\} = (x_0 - \delta, x_0\rangle$

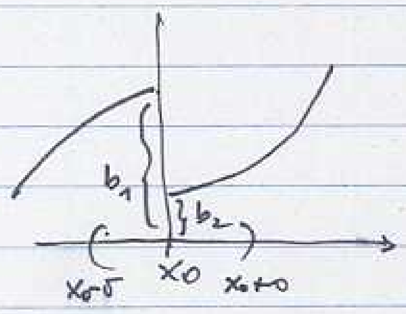
a)



Když $x \to x_0$ zleva,
pak $f(x) \to b$

Když $x \to x_0$ zprava,
pak $f(x) \to b$

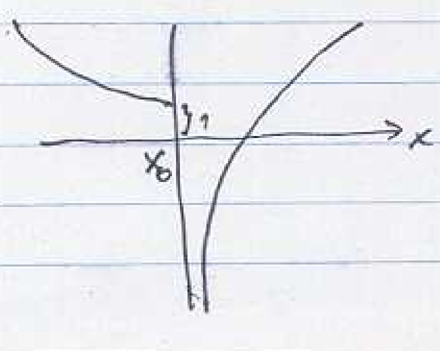
b)



Když $x \to x_0$ zleva
pak $f(x) \to b_1$;

Když $x \to x_0$ zprava,
pak $f(x) \to b_2$.

c)



když $x \to x_0-$ pak $f(x) \to b_1$;

když $x \to x_0+$, pak $f(x) \to$?
není pod nějakou úrovní

5.1.2. Definice lokálních vlastností funkce

Budeme definovat lokální vlastnosti dané funkce pouze v hromadných bodech definičního oboru D.

Bod x_0 je hromadný bod $D(f)$, když každé okolí $U_\delta(x_0)$ obsahuje aspoň jeden bod $x \in D(f)$; x_0 nemusí být bodem $D(f)$.

(A) Když existuje $b \in R$ takové, že pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$ (tj. $x_n \in P_\delta(x_0)$) platí $f(x_n) \to b$, říkáme, že

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b .$$

resp. $\lim_{x \to x_0} [f(x) - b] = 0$, když $|x_n - x_0| \to 0$

(B) Když existuje $b_1 \in R$ takové, že $\forall \{x_n\}$, $x_n \to x_0$, $x_n < x_0$ platí

$$f(x_n) \to b_1 ,$$

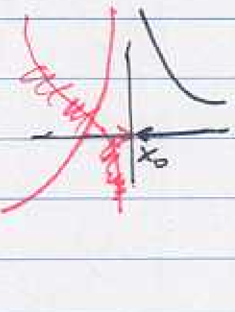
říkáme, že

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = b_1 \quad \dots \text{ levostranná limita}$$

(C) Když existuje $b_2 \in R$ takové, že pro $x_n \to x_0$, $\forall \{x_n\}$, $x_n > x_0$ platí $f(x_n) \to b_2$, říkáme, že

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = b_2 \quad \dots \text{ pravostranná}$$

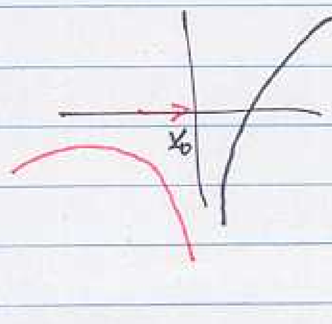
(D) ...... $x_n \to x_0+ \implies f(x_n) \xrightarrow{\text{divergují}} +\infty$,



říkáme, že

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$$

(E) .... $x_n \to x_0+ \implies f(x_n) \to -\infty$



5.1.3. Příklady

<u>Totožné formulace:</u> „Zjistěte lokální chování funkce f v okolí bodu x_0"
levém ⟷ pravém
okol.

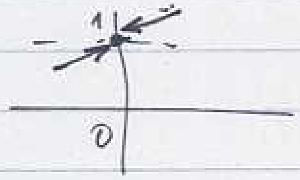
„Stanovte $\lim_{x\to x_0} f(x)$"

<u>Př:</u> Stanovte $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2-1}{x-1}$; Pro $x_n \to 0$ je: $x_n - 1 \to -1$

$x_n^2 \to 0$

$2x_n^2 - 1 \to -1$

$$f(x_n) = \frac{2x_n^2-1}{x_n-1} \longrightarrow \frac{-1}{-1} = 1;$$



Odpověď: $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2-1}{x-1} = 1$

<u>Př:</u> Stanovte $\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}}$: $x_n \to 0+ \Rightarrow \frac{1}{x_n} \xrightarrow{div} +\infty \Rightarrow$

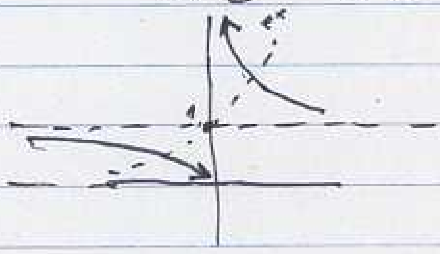
$\Rightarrow e^{\frac{1}{x_n}} \xrightarrow{div} +\infty$

$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}}$: $x_n \to 0- \Rightarrow \frac{1}{x_n} \xrightarrow{div} -\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{x_n}} \to 0$

Odpověď: $\lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0$



<u>Př:</u> Stanovte $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$;

Pro $x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0$, $n\to+\infty$ je $f(x_n) = \sin n\pi = 0$

Pro $y_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \to 0$, $n\to+\infty$ je $f(y_n) = \sin (4n+1)\frac{\pi}{2} = 1$

tj. $f(x_n) \to 0$

$f(y_n) \to 1$

<u>Závěr:</u> ... !?

5.1.4. Definice asymptotických vlastností funkcí

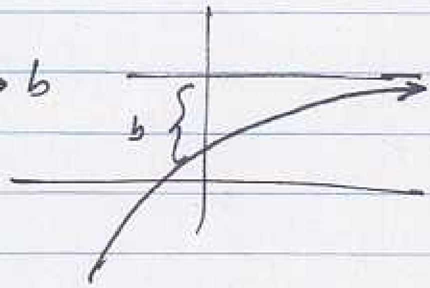
Okolím „+ nekonečna" je každý otevřený interval $(a, +\infty)$;
Okolím „− nekonečna" — " — $(-\infty, b)$.

(a) Když existuje $b \in R$ takové, že

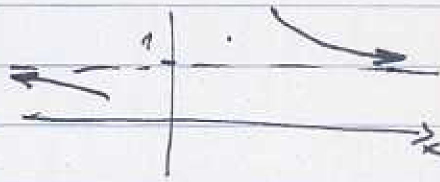
$$\forall \{x_n\},\ x_n \xrightarrow{div} \pm\infty \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow b$$

říkáme, že

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$



Př: Stanovme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x}}$



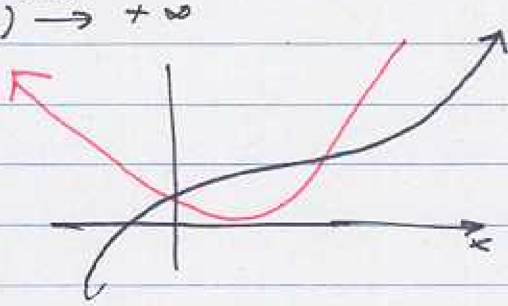
$$x_n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to 0+ \Rightarrow e^{\frac{1}{x_n}} \to 1+$$

$$x_n \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x_n} \to 0- \Rightarrow e^{\frac{1}{x_n}} \to 1-$$

(b) Když $\forall \{x_n\},\ x_n \xrightarrow{div} \pm\infty \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{div} +\infty$

říkáme, že

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$$



(c) - - - - - -

říkáme, že

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$$

obrázek

5.1.5. Jednoznačnost limity

Existuje-li vlastní číslo $b = \lim_{x \to x_0} f(x)$, pak je jediné.

(Důkaz sporem)

Zdůvodnění: Kdyby jich existovalo víc (aspoň dvě) $b_1 \neq b_2$, pak by musely ~~existovat dvě posloupnosti~~

$$f(x_n) \to b_1, \quad f(x_n) \to b_2, \quad \forall \{x_n\}, x_n \to x_0, x_n \neq x_0;$$

a to je v rozporu s jednoznačností limity konvergentní posloupnosti $\{f(x_n)\}$.

5.1.6. Algebra limit

Když existují $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = c$,

pak existují také limity

$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)]$ = a rovnají se $b \pm c = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$,

$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x)$ = —〃— $b \cdot c = (\lim_{x \to x_0} f(x)) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$,

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, ~~$g(x) \neq 0$~~ = —〃— $\frac{b}{c} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ pro $c \neq 0$.

Věty o nerovnostech mezi funkcemi a jejich limitami

5.1.7. O nerovnosti

(a) Když $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in P\mathcal{U}_\delta(x_0)$: a existují $\lim_{x \to x_0} f(x)$, $\lim_{x \to x_0} g(x)$,

pak platí $\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$

Věta o sevření pro limity fcí

(b) Když $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ $\forall x \in P\mathcal{U}_\delta(x_0)$; a existují obě vnější limity

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x),$$

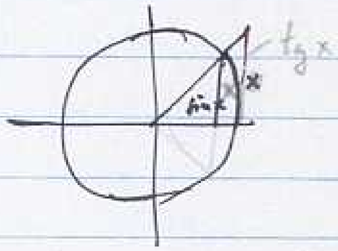
pak existuje také $\lim_{x \to x_0} h(x)$ a platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

Dk. Tvrzení plyne z analogických vlastností posloupností.
(věta pro posloupnosti)

Př: Zdůvodněme, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Z obrázku:



$\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$:

$$0 < |\sin x| < |x| < \left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| \quad / : |\sin x| \neq 0$$

$$\Rightarrow 0 < 1 < \frac{|x|}{|\sin x|} < \frac{1}{|\cos x|}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$1 \qquad\qquad 1$$

Př: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ ... pomocí věty o sevření:

$$n < x_n < n+1 \qquad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

5.1.8. Existence limity fce (nutná a postačující podmínka)

Funkce f definovaná v okolí hromadného bodu x_0 má ~~v bodě~~ x_0 limitu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, právě ~~když platí~~

~~tehdy když~~: a) $f(x_0+)$, $f(x_0-)$ existují,

b) platí $f(x_0+) = f(x_0-)$.

Důkaz: Obě implikace ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$) se dokáží na základě definice limity fce.

5.1.9. Limita složené funkce

Věta: Mějme složenou funkci $h = g \circ f$: $h(x) = g(f(x))$, $x \in D = D(h) = D(f)$,

kde $f: D(f) \to R$, $g: D(g) \to R$, $H(f) \subset D(g)$.

Když $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ (existuje),

$\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = b$ (existuje),

Potom existuje

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) \overset{\text{a je}}{=} \lim_{y\to y_0} g(y) = b,$$ pokud platí nebo a) $g(y_0) = b$

b) $f(x) \neq y_0$, $\forall x$ v prstencovém okolí $P\delta(x_0) \cap D(f)$.

Př: $\lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = ?$

$y = f(x) = \frac{1}{x}$; odtud pro $x \to 0+ \Rightarrow y \to +\infty$

pro vnější fci

$z = g(f(x)) = g(y) = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \longrightarrow e$

Přitom $\frac{1}{x} \neq +\infty$ pro $x \neq 0$ .. podmínka b) věty o limitě složené fce je splněna

$\Rightarrow \lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Př: $\lim_{x\to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to +\infty} \left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e^{-1}} = e$

Subst.: $x = -t$

Př: $\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \dots = \cancel{e^{-x}}$ ← Chyba: Má být $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Př. $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \dots = \cancel{e^{ax}}$ ← Chyba: Má být e^a.

užitím substituce: $\frac{x}{a} = y$ pro $a \neq 0$

5.1.10. Poznatky k zapamatování

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; ~~látka~~

3. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$; $\lim_{x\to 0} \frac{\log_a (1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, $a > 0$;

4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$;

[5. $\lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0-} f(-x)$ (pokud obě existují) jednostranné limity ?]

~~6.~~ 5. $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right)$, (pokud obě existují) ;

6. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0 + h)$

(5.8) ~~8~~ 8

~~Důsledek vl. 1,2:~~

Poznámka: Funkce x, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\ln(1+x)$, $e^x - 1$

se pro $x \to 0$ „chovají stejně";

říkáme, že jsou si asymptoticky rovny

Definice: $f \sim g$ pro $x \to x_0$, když

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Příklad (využití k výpočtu limit).

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + 2\operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 x) + xe^x} = \lim \frac{2x + 6x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + x^2) + x} =$$

$$= \lim \frac{3x^2 + 8x}{3x + x^2 + x} = \lim \frac{3x^2 + 8x}{x^2 + 4x} = \lim \frac{x(8 + 3x)}{x(4 + x)} = \frac{8}{4}$$

Příklad: Vyšetřit chování funkce $f: D(f) \to \mathbb{R}$, kde

$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; $= e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$

$1 + \frac{1}{x} > 0$.

a) $x > 0$: $\left.\begin{array}{l} 1 + x > 0 \\ x > -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 0$

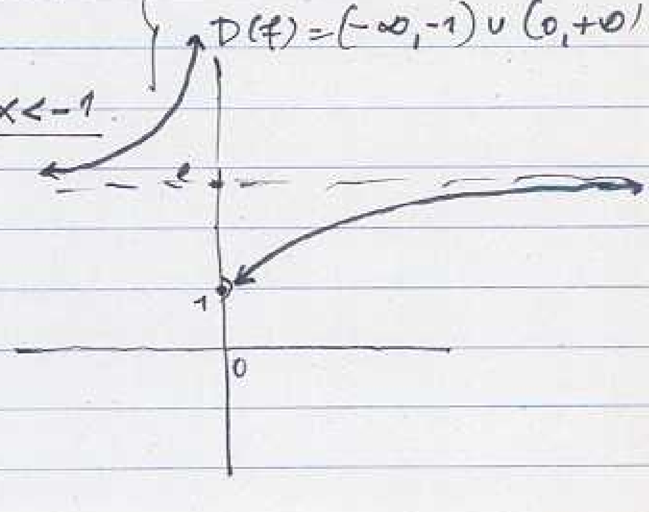
b) $x < 0$: $\left.\begin{array}{l} 1 + x < 0 \\ x < -1 \end{array}\right\} \Rightarrow x < -1$

$D(f) = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e-$, $\lim_{x \to -1-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e+$,

$\lim_{x \to 0+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1+$,



5.2. Spojitost funkce v bodě, (speciální lokální vlastnost)

5.2.1. Definice

Funkce $f: D(f) \to R$ je spojitá v hromadném bodě $x_0 \in D(f)$, když platí

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$$

$$\iff \lim_{h \to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)]$$

$$\iff \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0 \quad \Big| \quad \Delta f = f(x_0+h) - f(x_0), \quad \Delta x = h = x - x_0$$

... f je spojitá zprava, když $f(x_0+) = f(x_0)$,

\- - - - . zleva, když $f(x_0-) = f(x_0)$.

Fce f je spojitá v izolovaném bodě $\bar{x}$, je-li v něm definovaná.

5.2.2. Kritéria spojitosti (= nutné a postačující podmínky spojitosti)

Funkce f je spojitá v hromadném bodě $x_0 \in D(f)$ právě tehdy když

$$\underbrace{\forall \{x_n\},\ x_n \to x_0 \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)}$$

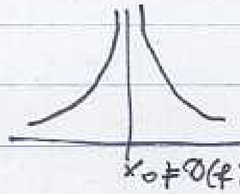
! $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$

Dk. Zdůvodnění obou implikací „$\Rightarrow$", „$\Leftarrow$" bude součástí tzv. teoretických otázek u zkoušky (otázka za „1").

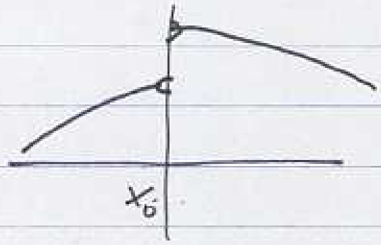
5.2.3. Body nespojitosti

Bodem nespojitosti funkce $f: D(f) \to R$ rozumíme takový hromadný bod x_0, který má jednu z těchto vlastností:

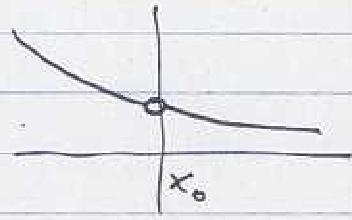
a) $\boxed{x_0 \notin D(f)}$ – funkce není v bodě x_0 definovaná:



nespojitost 2. druhu

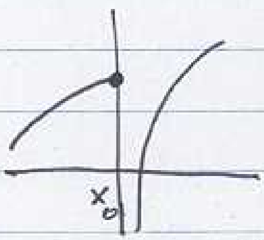


nespojitost 1. druhu



odstranitelná nespojitost

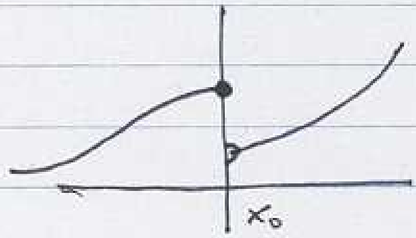
b) $\boxed{x_0 \in D(f)}$, avšak $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$



nespojitost 2. druhu

$f(x_0-) = f(x_0)$

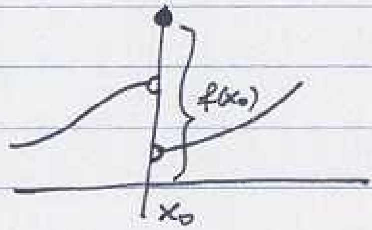
$\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = -\infty$



nespojitost 1. druhu

$f(x_0-) = f(x_0)$

$f(x_0+) \neq f(x_0)$



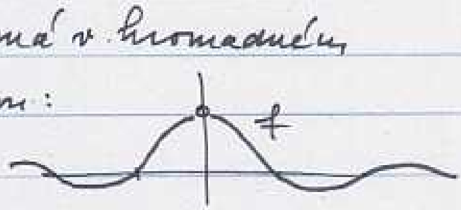
nespojitost 1. druhu

$f(x_0-) \neq f(x_0)$

$f(x_0+) \neq f(x_0)$

Př: Funkce $f: x \to \frac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$ má v hromadném bodě $x_0 = 0$ nespojitost odstranitelnou:

$f(x_0\pm) = 1$



Definujeme funkci

$$g: \; g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

která už je v bodě $x_0 = 0$ spojitá; je nyní spojitá na celém def. oboru.

procedura „odstraňování nespojitosti"

5.2.4. Spojitost elementárních funkcí

Následující funkce jsou spojité **v každém bodě** svého definičního oboru. Připojené implikace se pokuste zdůvodnit (tj. ověřit jejich pravdivost) [bude součástí teoretických otázek u zkoušky].

a) Polynomiální funkce: $f(x) = P_n(x)$;

$$h \to 0 \Rightarrow \left[(x_0+h)^2 - x_0^2\right] \to 0$$

$$\Rightarrow \left[(x_0+h)^3 - x_0^3\right] \to 0$$

b) Goniometrické funkce:

$$h \to 0 \Rightarrow \sin(x_0+h) - \sin x_0 \to 0$$

$$\Rightarrow \cos(x_0+h) - \cos x_0 \to 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(x_0+h) - \operatorname{tg} x_0 \to 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{cotg}(x_0+h) - \operatorname{cotg} x_0 \to 0$$

c) cyklometrické funkce:

$$h \to 0 \Rightarrow \arcsin(x_0+h) - \arcsin x_0 \to 0$$

- - - atd - - - - -

d) exponenciální a logaritmické funkce:

$$h \to 0 \quad e^{x_0+h} - e^{x_0} \to 0$$

$$\ln(x_0+h) - \ln x_0 \to 0$$

e) ... další, např. iracionální funkce (s odmocninami)

5.2.5. Manipulace se spojitými funkcemi

Jsou-li funkce f a g spojité v bodě $x_0 \in D(f)$, $x_0 \in D(g)$ a $U_\delta(x_0)$ patří do oboru definičních oborů, potom:

$$f+g,\ f-g,\ fg,\ cf,\ |f|,\ \frac{f}{g},\ \text{když } g(x) \neq 0 .$$

jsou také spojité v bodě x_0.

Dk: Je důsledkem ~~...~~ tvrzení z odst. 5.1.6 a 4.5.7

5.2.6. Spojitost složené funkce

mějme složenou funkci ≡ superpozici funkcí f a g

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Když f je spojitá v bodě x_0 a g je spojitá v bodě $y_0 = f(x_0)$, potom $g \circ f$ je spojitá v bodě x_0 a je

$$g(f(x_0)) = g(y_0).$$

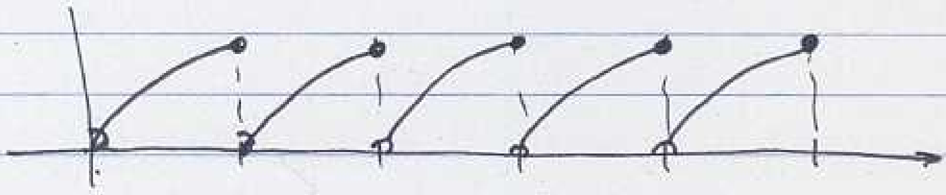
Př: Funkce g: $g(x) = \sin\sqrt{x^2+1} \equiv g(f(x))$;

$g(y) = \sin y$ ... spojitá v každém $y_0 \in R$

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ ... spojitá v každém $x_0 \in R$

$(g \circ f)(x) = \sin\sqrt{x^2+1}$ je spojitá v každém $x_0 \in R$

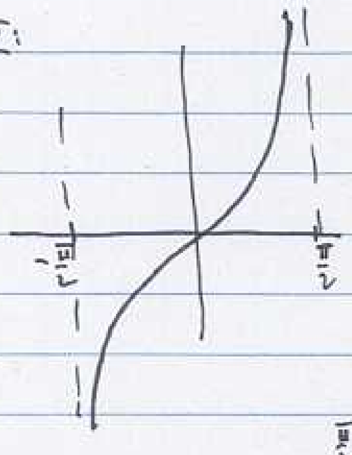
Poznámka: Funkce se nazývá po částech spojitá na intervalu I, má-li na I konečný počet bodů nespojitosti nejvýš 1. druhu.



5.3 Spojitost funkce na uzavřeném intervalu = globální vlastnost = globální spojitost

5.3.1. Definice (Když) funkce f je spojitá v každém vnitřním bodě $x \in \langle a,b\rangle$ a platí $f(a+) = f(a)$, $f(b-) = f(b)$ [v koncových bodech je spojitá „zevnitř"], potom říkáme, že funkce f je spojitá na $\langle a,b\rangle$.

Př:

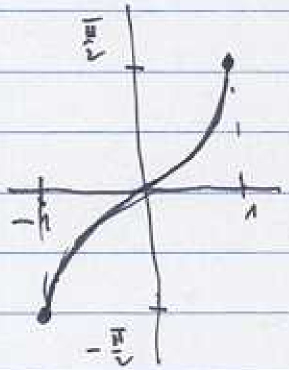


$f(x) = \operatorname{tg} x$;

f je spojitá na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

ale není spojitá na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Př:



$f(x) = \arcsin x$;

f je spojitá na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

ale současně také na $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

5.3.2. Nejdůležitější důsledky globální spojitosti

(A) Mějme spojitou funkci $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ a platí $f(a)f(b) < 0$.
Potom existuje $\xi \in (a,b)$ takové, že $f(\xi) = 0$.
[věta o nulové hodnotě]

(B) Mějme spojitou funkci $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ a $f(a) \neq f(b)$.
Potom pro každé $\bar{y}$ mezi $f(a)$ a $f(b)$ existuje $\bar{x} \in (a,b)$ takové, že $f(\bar{x}) = \bar{y}$ (existence kořene rovnice)

(C) Mějme spojitou funkci $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Potom existuje $K > 0$, že $|f(x)| \leq K$, $\forall x \in \langle a,b\rangle$; a existují čísla
$m = \min\limits_{x \in \langle a,b\rangle} f(x)$, $M = \max\limits_{x \in M} f(x)$. ! Ilustrace !