4. Funkce – reálné funkce jedné reálné proměnné

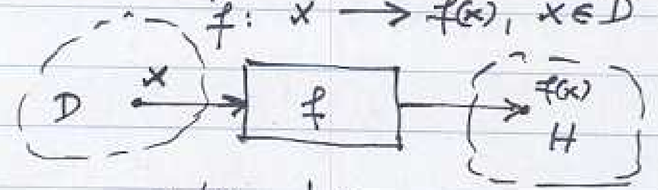
4.1. Pojem funkce a graf funkce

4.1.1. Definice

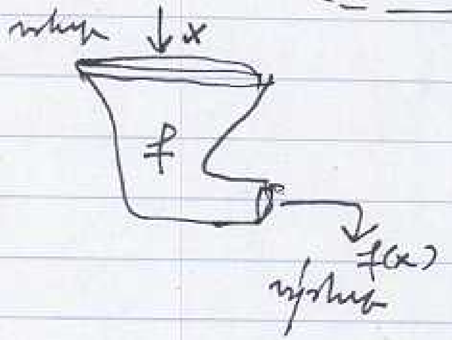
Mějme množiny D a H. Zobrazení, které každému prvku z množiny D přiřadí právě jeden prvek (z) množiny H zapisujeme

a) $f: D \to H$
$f: x \to f(x),\ x \in D$

matematický zápis
$[f: y = f(x),\ x \in D]$

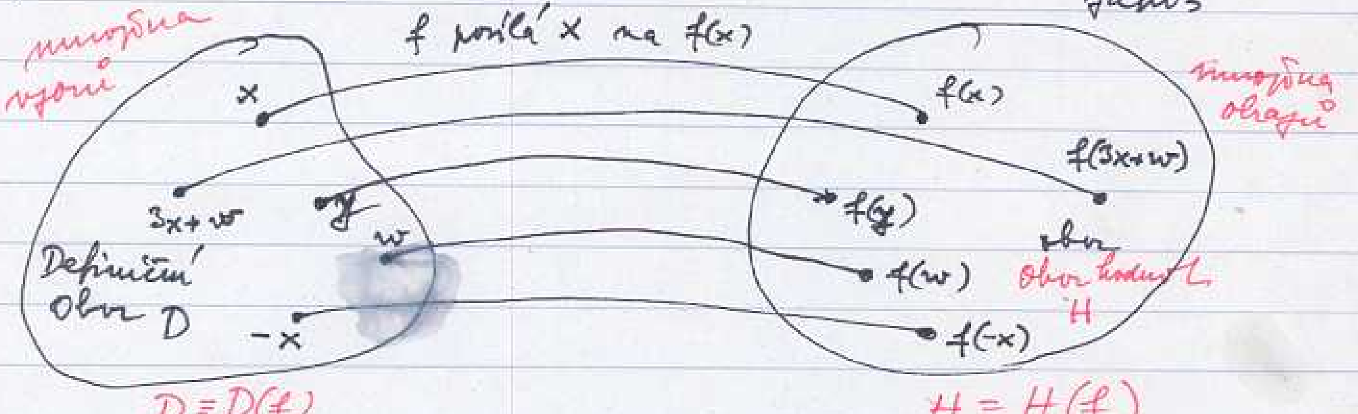
b) 

kybernetický zápis: f jako „blackbox" se vstupem a výstupem

c) 

strojařský zápis („mašinka na maso")

d) geometricko-„poštovní" zápis



Jsou-li $D \subset R$, $H \subset R$ podmnožiny množiny reálných čísel, pak f se nazývá <u>reálná funkce reálné proměnné</u>:
x je reálné číslo (číselný argument, reálná proměnná)
f(x) je reálné číslo (funkční hodnota

4.1.2. Způsoby zadání funkce (funkcí)

a) analyticky $\equiv$ (algebraickou) formulí pro výpočet $f(x)$:

$$f(x) = x^2; \qquad f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad g(t) = \sqrt{t+1}.$$

b) tabulkou hodnot: Pro jistý výběr čísel $x_i \in D$ sestavíme dvojice $[x_i, f(x_i)]$

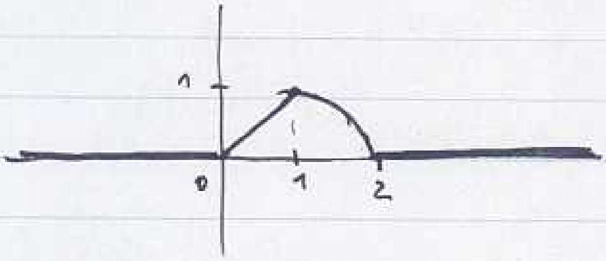
c) Graficky: Dvojice $[x, f(x)]$ chápeme jako souřadnice bodů v souřadnicové rovině se souřadnicovým systémem: (!)

– kartézským

– polárním

Př:

$$f: \begin{cases} f(x) = x, & x \in \langle 0,1 \rangle, \\ f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}; & x \in (1,2\rangle, \\ f(x) = 0, & x \notin \langle 0,2 \rangle. \end{cases}$$



Př: Pro formule $f(x) = x-2$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x^2$ identifikujte následující funkční hodnoty:

$f(1)$	$g(1)$	$h(1)$
$f(0)$	$g(-1)$	$h(-1)$
$f(x^2)$	$g(0)$	$h(0)$
$f(x^2+1)$	$g(x+1)$	$h(x+1)$
$f(-1)$	$g(x^2)$	$h(x^2)$
$f(x+1)$	$g(x^2+1)$	$h(x^2+1)$
$f(x^2)+1$	$g(x^2)+1$	$h(2x)+2x$
$f(2x)+2x$	$g(2x)+g(x^2)$	$h(2x)+h(x^2)$
$f(2x)+f(x^2)$	$g(-x)-g(x)$	$h(-x)+h(x)$

Př: Posuďte možnost výpočtu funkčních hodnot z předchozího příkladu pro: $f(x) = 1$, $g(x) = \sqrt{x-1}$, $h(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

4.1.3. Graf funkce

→ viz přílohy

! Schopnost nakreslit pečlivě grafy funkcí vyskytujících se v ME1 se považuje za základní gramotnost v matematice. !!

! Neschopnost nakreslit grafy ... je příkladem matematické negramotnosti. Je to postačující důvod k neúspěchu u zkoušky. !!

Graf funkce $f: D \to H$, $D \subset R$, $H \subset R$ je množina

$$G_f = \{(x,y) \in R^2 : x \in D,\ y = f(x)\}$$

4.1.4. Restrikce funkce (zúžení) ——→ ./.

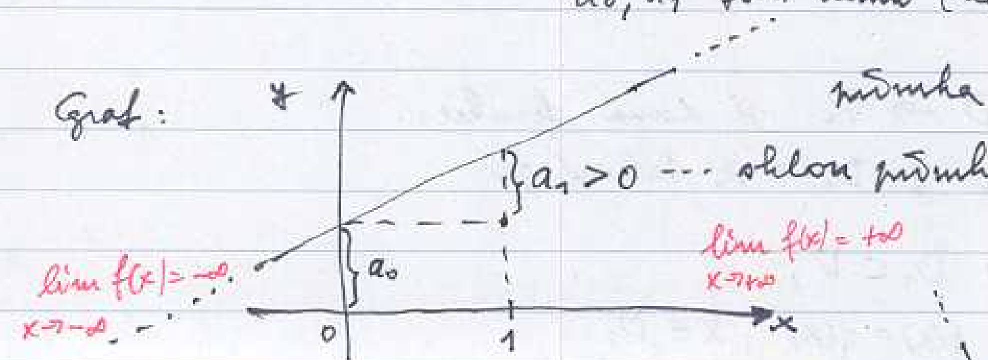
4.2. Racionální funkce

4.2.1. Lineární funkce

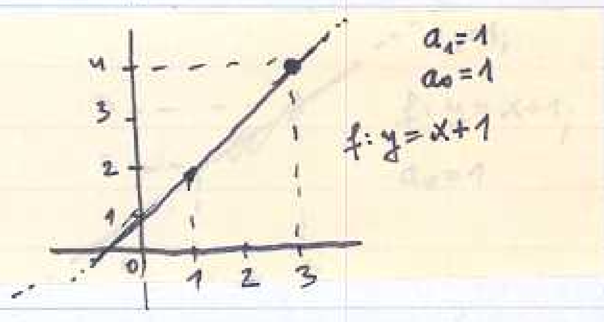
$f: y = a_1 x + a_0$, $x \in D(f) = R = (-\infty, +\infty)$

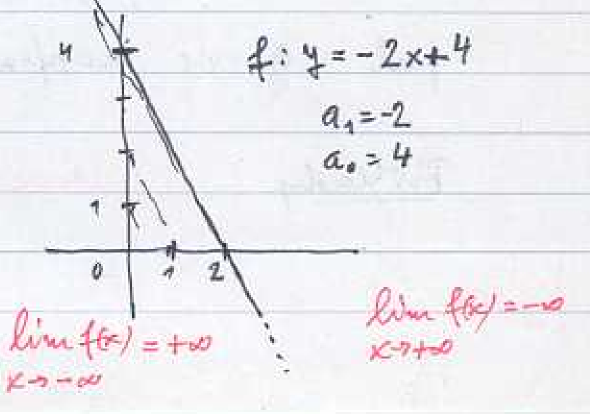
a_0, a_1 jsou daná (reálná) čísla

Graf:



Př.:





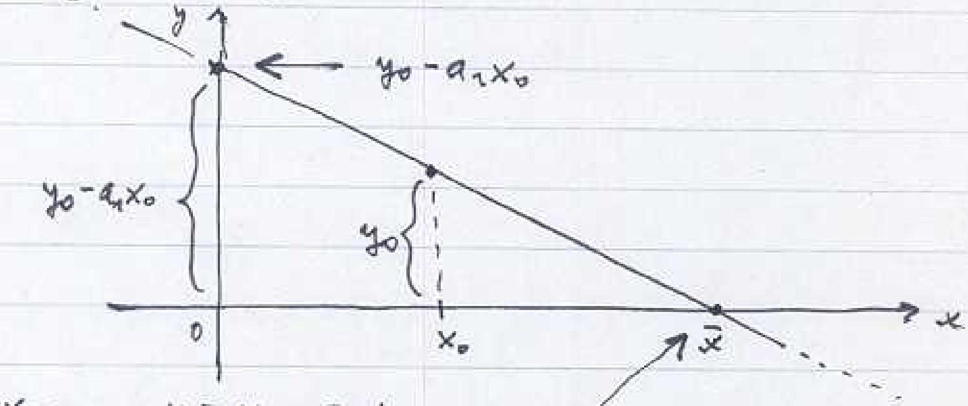
Př: Stanovte lineární funkci f, která v bodě $x_0 \in R$ nabývá hodnoty $f(x_0) = y_0$:

Graf musí procházet bodem (x_0, y_0); určete průsečíky grafu se souřadnicovými osami.

$$y = a_1 x + a_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = a_1 x_0 + a_0$$

Odečtením:

$$y - y_0 = a_1(x - x_0)$$



Pro $x=0$: $\quad y = y_0 - a_1 x_0$

Pro $y=0$: $\quad -y_0 = a_1(x - x_0) \Rightarrow \bar{x} = x_0 - \dfrac{y_0}{a_1}$;

Úkol: nakreslete a porovnejte grafy funkcí: (!!)

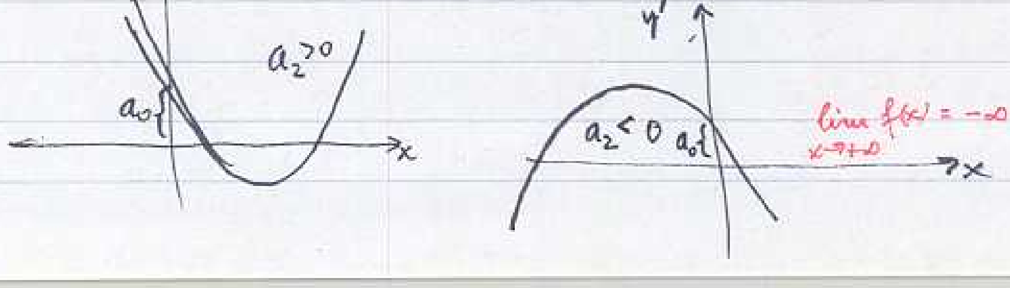
$$\left.\begin{aligned} y &= a_1 x \,; \\ y &= a_1(x - x_0)\,; \\ y - y_0 &= a_1 x \,; \\ y - y_0 &= a_1(x - x_0)\,. \end{aligned}\right\} \quad a_1, x_0, y_0, a_0 \text{ volte}$$

P

4.2.2. Kvadratická funkce

f: $y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $\quad x \in D(f) = (-\infty, +\infty)$,
$a_0, a_1, a_2 \neq 0$ jsou daná reálná čísla

Graf: Parabola: koeficienty a_0, a_1, a_2 určují její polohu v souřadnicové systému.



Úkol: nakreslete a porovnejte grafy funkcí (!!)

$$\left.\begin{array}{l} y = a_2x^2 \\ y = a_2(x-x_0)^2 \\ y - y_0 = a_2(x-x_0)^2 + a_1(x-x_0) \end{array}\right\} \text{pro konkrétní volby } x_0, y_0, a_1, a_2.$$

Stanovte průsečíky grafů s osou x a s osou y.

4.2.3. Obecná polynomiální funkce

$$f:\ y = \underbrace{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0}_{P_n(x)},\ a_n \neq 0,\ n \in N;\quad a_i \dots \text{koeficienty}$$

$P_n(x)$ – polynom stupně n; $x \in R$

$$f:\ y - y_0 = a_n(x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + a_1(x-x_0);$$

$$y_0 = f(x_0) \overset{sym.}{=} a_0$$

např: $y = x^3$; ... graf!

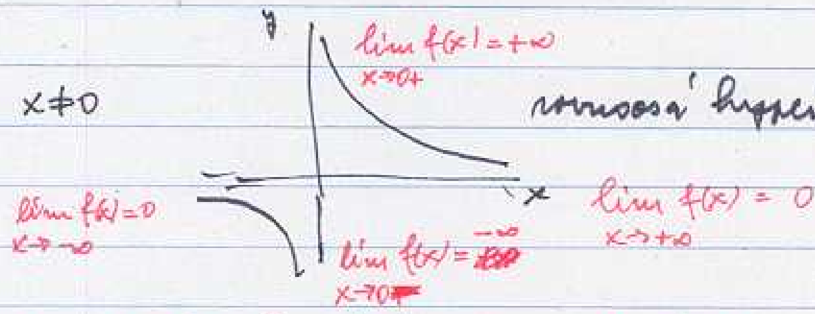
Spec. případ: mocninná funkce $f:\ y = x^n$, $x \in R$, $n \in N$

4.2.4. Racionální lomená funkce

$$f:\ y = \frac{P_n(x)}{P_m(x)};\quad x \in D(f),\ P_n, P_m \text{ jsou polynomy}$$

např: $y = \dfrac{x^2-2x+1}{x+7}$; $x \neq -7$, tj. $D(f) = R \setminus \{-7\}$

např: $y = \dfrac{1}{x}$; $x \neq 0$



rovnoosá hyperbola

Úkoly: Pro dané funkce zařadit do kategorie z odd. 4.2; určovat obory hodnot $H(f)$.

Úkol: Za zapsat funkce, jejichž grafy jsou na obrázcích:

4.3. Logaritmická a exponenciální funkce

~~4.3.1. Logaritmická funkce přirozená~~

4.3.1. Přirozená exponenciální funkce

Víme ze střední školy, že každé kladné číslo a lze umocnit reálným číslem $x \in R$ a obdržíme jediné reálné číslo a^x.

Pro $e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \doteq 2{,}718281828459045\ldots$ (irac. číslo)

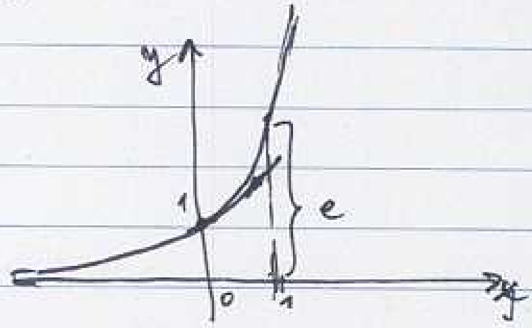
definujeme zobrazení

$$x \in R \longrightarrow e^x \in (0, +\infty).$$

Tomuto zobrazení říkáme přirozená exponenciální funkce

$$f:\ y = e^x,\ x \in R;$$

Graf.



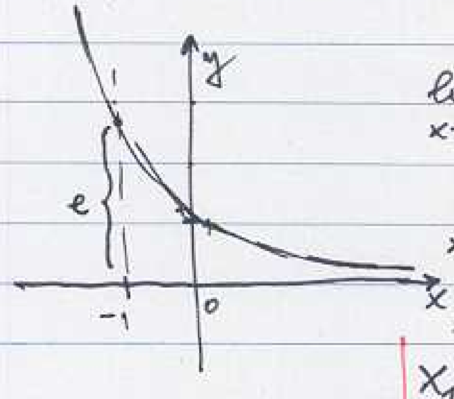
$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0+$

Vidíme (!): $D(f) = R$, $H(f) = (0, +\infty)$; $\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2}}$!

Př: $g:\ y = e^{-x}$; $x \in R$; $y \in (0, +\infty) = H(f)$

Graf: $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;



$\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

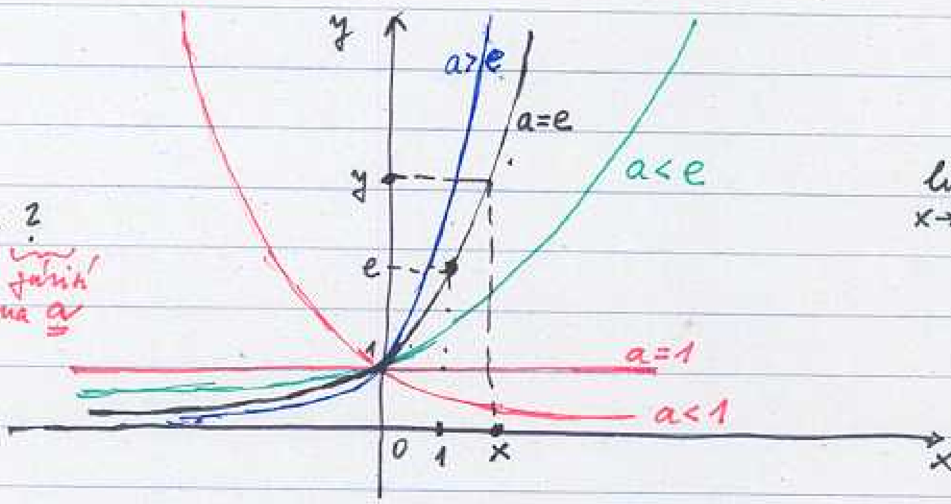
$\boxed{x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}}$!

4.3.2. Obecná exponenciální funkce

Pro $a>0$ definujeme:

$$f: y = a^x,\ x \in R,\quad H(f) = (0,\infty)$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \underbrace{?}_{\text{závisí na } a}$



$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \underbrace{?}_{\text{závisí na } a}$

4.3.3. Přirozená logaritmická funkce

Každému číslu $y \in (0,+\infty)$ přiřadíme (jediný) kořen $x \in R$ rovnice

$$e^x = y$$

Tomuto kořenu říkáme přirozený logaritmus čísla y a zapisujeme

$$x = \ln y\ ;$$

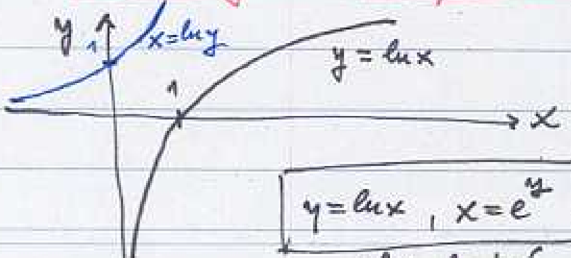
tomuto přiřazení definovanému pro všechna kladná y říkáme přirozená logaritmická funkce.

$g:\quad y \to \ln y,\quad y \in (0,+\infty)$

$g:\quad x \to \ln x,\quad x \in (0,+\infty)$ (pouze písmenková změna)

Zápisy $\boxed{x = \ln y,\quad y = e^x}$ jsou ekvivalentní

Graf:



$\boxed{y = \ln x,\ x = e^y}$ ekvivalentní zápisy

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

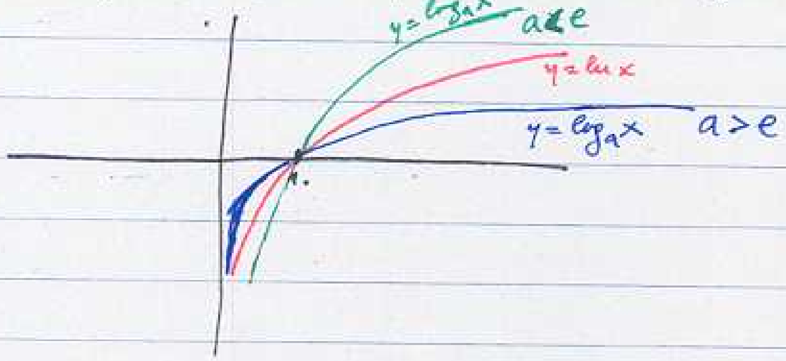
$\lim\limits_{x\to 0+} \ln x = -\infty$

4.3.4. Obecná logaritmická funkce

Analogicky jako v odd. 4.3.3 : $a^x = y \iff x = \log_a y$;

kořen x se nazývá logaritmus kladného čísla y při základu a

Graf: $f: y = \log_a x$, $x \in (0,+\infty)$; $y \in R$



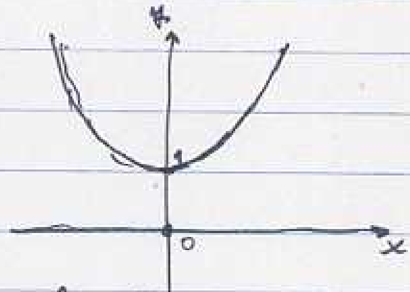
4.3.5. Hyperbolické funkce

a) $f: y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \overset{\text{ozn.}}{\equiv} \cosh x$; $x \in R = D(f)$

$y \in (0,+\infty)$

hyperbolický kosinus

Graf není parabola, ale tzv. řetězovka



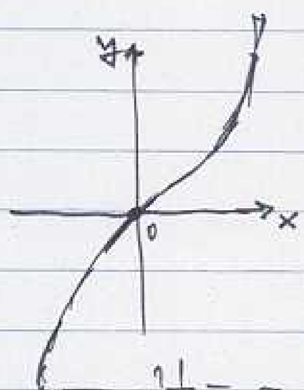
$\lim\limits_{x \to -\infty} \cosh x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cosh x = +\infty$

b) $f: y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \overset{\text{ozn.}}{\equiv} \sinh x$, $x \in R$

$y \in R$

lim = ?

hyperbolický sinus



c) $f: y = \operatorname{tgh} x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

$x \in R$, $y \in (-1,1)$

lim ?

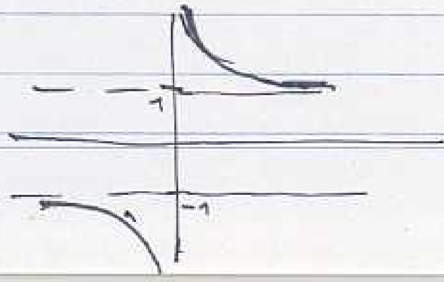
hyp. tangens

d) $f: y = \operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

$x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$

$y \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

hyp. kotangens



4.3.6. Užitečné vzorce

(Středně spořádaný student ZČU si je umí odvodit)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$\operatorname{tgh} x = \frac{1}{\operatorname{cotgh} x},$$

$$\operatorname{tgh} x \operatorname{cotgh} x = 1,$$

$$1 - \operatorname{tgh}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x},$$

$$\operatorname{cotgh}^2 x - 1 = \frac{1}{\sinh^2 x},$$

$x \in D(f)$ ... definiční obor funkcí vystupujících ve vzorci

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \text{lichá}$$

$$\cosh(-x) = \cosh x \qquad \text{sudá}$$

$$\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x,$$

$$\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x,$$

$$\operatorname{tgh} 2x = \frac{2 \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh}^2 x},$$

$$\sinh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{2}},$$

$$\cosh \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\cosh x + 1}{2}},$$

$$\sinh x + \sinh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cosh x + \cosh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \cosh \frac{x-y}{2},$$

$$\cosh x - \cosh y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$$

Poznámka. Z hlediska geometrické definice bychom v analogii s hyperbolickými funkcemi měli goniometrickým funkcím říkat: kruhový sinus, kruhový kosinus, ... resp. kružnicový sinus, ... atd.

4.4. Goniometrické a cyklometrické funkce

4.4.1. $f: y = \sin x,\ x \in R,\ y \in \langle -1, 1 \rangle$

Graf: $\Rightarrow$ vlastnosti! (periodičnost, omezenost)

„Deriváty" ≡ odvozeniny: –

$y = \sin(x - x_0)$ … posunutí v argumentu

$y - y_0 = \sin x$ ..

$y - y_0 = a \sin \omega (x - x_0)$

Grafy: SDP: trénovat, trénovat, trénovat (ruka)

[VKS(b): učit se, učit se, učit se (Lenin k funkcionářům)

4.4.2. $f: y = \cos x,\ x \in R,\ y \in \langle -1, 1 \rangle$

Graf: – – –   vlastnosti

„Deriváty"

4.4.3 $f: y = \operatorname{tg} x,\ x \in D(f)$: – – $D(f) = ?$

4.4.4 $f: y = \operatorname{cotg} x,\ x \in D(f);$ $D(f) = ?$

vlastnosti: periodičnost, neomezenost

Existuje $K > 0$ že $|\operatorname{tg} x| \leq K \quad \forall x \in D(f)$?

Odpověď: neexistuje!

~~4.5. Restrikce funkce (zúžení)~~

~~Nechť $f: D \to R$.~~

~~Je-li $g: D_1 \to R$ taková, že a) $D_1 \subset D$~~

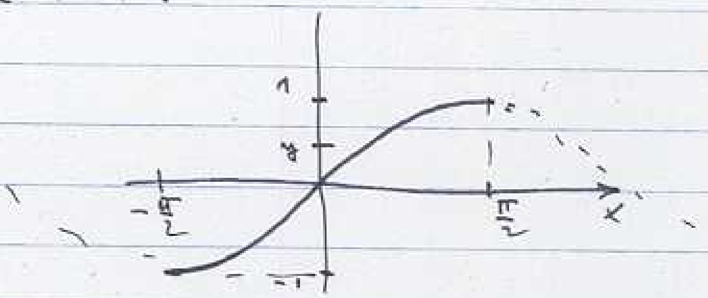
~~b) $g(x) = f(x),\ x \in D_1$~~

~~pak g se nazývá restrikce f na D_1~~

~~ilustrace: na cvičení~~

4.4.5
~~4.6~~. Cyklometrické funkce
Funkce arkussinus

~~4.6.1~~ Vezmeme restrikci ~~funkce~~ $f: y = \sin x$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$ funkce sinus



vlastnosti: rostoucí, není periodická, omezená

Pro každé $y \in \langle -1, 1 \rangle$ existuje jediný kořen rovnice $\sin x = y$. Tento kořen označíme

$$\boxed{x = \arcsin y \iff y = \sin x}$$

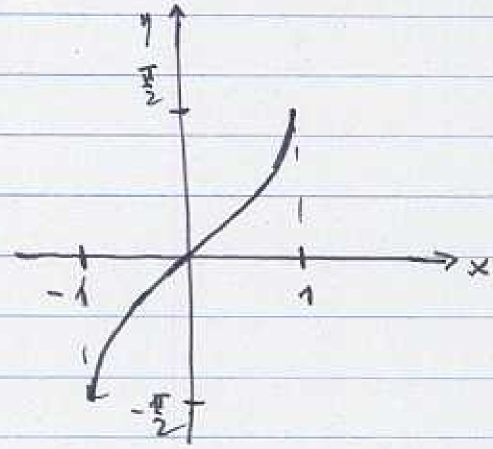
Zobrazení (intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ na interval $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$):

$$y \in \langle -1, 1 \rangle \longrightarrow \arcsin y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$$

se nazývá <u>funkce arcsinus</u> (arkussinus)

Při označení
$$\boxed{y = \arcsin x \iff x = \sin y, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \quad y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle}$$

Graf:



vlastnosti: rostoucí, omezená

~~4.6.2~~. Funkce arkuskosinus
~~4.6.3~~. F. arkustangens
~~4.6.4~~. F. arkuskotangens

} nastudovat (doma nebo na SDP)

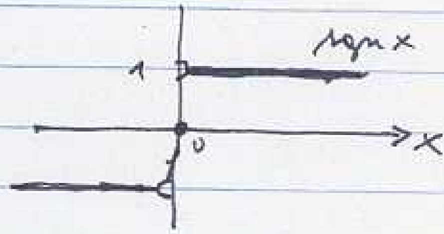
4.5. Operace s funkcemi a složená funkce

4.5.1. Speciální typy funkcí

a) **Znaménková funkce**

$f: y = \operatorname{sgn} x,\ x \in R$, kde

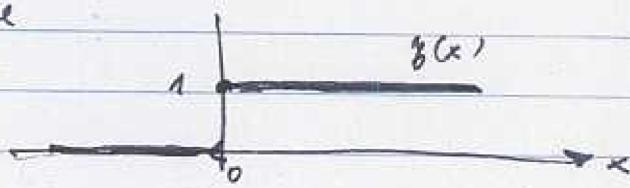
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



b) **Funkce jednotkového skoku** (Heavisideova funkce)

$f: y = \eta(x),\ x \in R$, kde

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

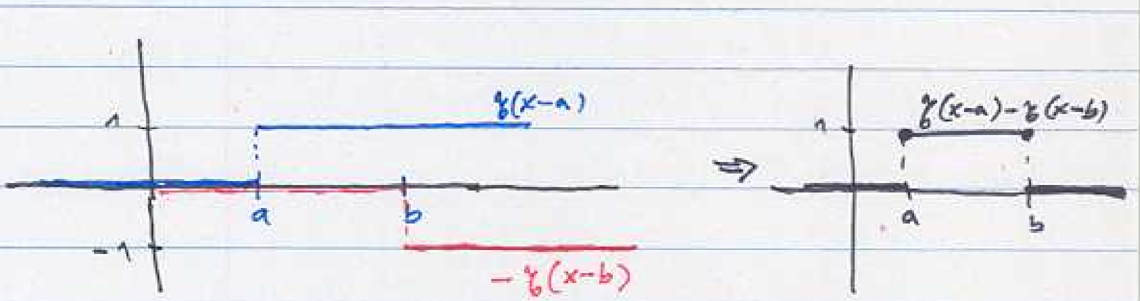


c) **Funkce jednotkového skoku s posunutým argumentem**

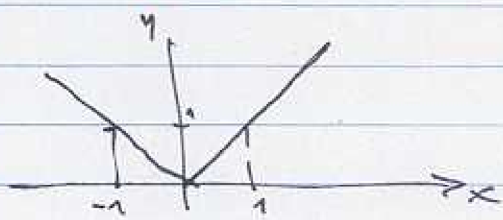
$$f: y = \eta(x-a) = \begin{cases} 1, & x \geq a, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

d) **Impulsní funkce:**

$f: y = \eta(x-a) - \eta(x-b);\ x \in R$



e) $f: y = |x|,\ x \in R$

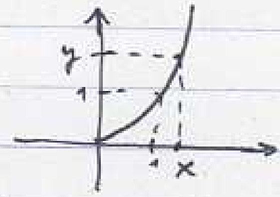


f) „Iracionální" funkce ≡ funkce s odmocninami

Mějme danou funkci

$$f: \; y = x^2 \;, \; x \in \langle 0, +\infty) \equiv D(f)$$

$$y \in \langle 0, +\infty) \equiv H(f) \,.$$



Pro každé $y \in H(f)$ existuje $x \in D(f)$, které je jediným kořenem rovnice

$$x^2 = y \,.$$

Tento kořen se může označovat $x = \text{KOŘ}(y)$.
Obvyklejší je označování

$$x = \sqrt{y} \;;$$

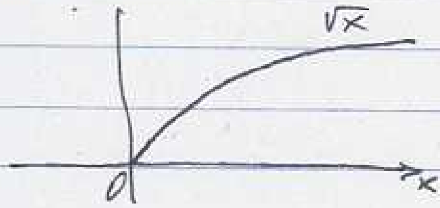
Historická poznámka:
$\to x = \text{radix}(y)$
$x = r(y) \equiv \sqrt{y}$

Jestliže tedy každému $x \in \langle 0, +\infty)$ přiřadíme kořen rovnice (kv. rovnice)

$$y^2 = x \,,$$

definujeme tím funkci

$$g: \; y = \sqrt{x} \,, \; x \in \langle 0, +\infty) \,.$$



Analogicky můžeme postupovat při definici funkcí různým předpisem s odmocninami.
— příklady, ilustrace — domácí studium, SDP

Poznámky:

4.5.2. Základní třídy funkcí

Reálné funkce jedné reálné proměnné

$$f: D \to R$$, kde D obsahuje aspoň dva body

třídíme podle následujících vlastností:

1. rostoucí na D, když: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

2. klesající na D, když: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;

3. nerostoucí na D, když: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqq f(x_2)$;

4. neklesající na D, když: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)$;

5. ostře monotónní na D, když je buď rostoucí nebo klesající na D;

6. monotónní na D, když je buď neklesající nebo nerostoucí na D;

7. konvexní na intervalu D, když ! D musí být interval !

$$\forall x_1 x_2 \in D : f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};$$

„$<$" ... ostře konvexní

8. konkávní na intervalu D, když

$$\forall x_1, x_2 \in D : f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};$$

„$>$" ostře konkávní

9. sudá na symetrické množině D, $[x \in D \Rightarrow -x \in D]$
když
$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

10. Lichá na symetrické množině D,
když
$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in D$$

11. Periodická na D, existuje-li takové číslo $T>0$, že
   a) $\forall x \in D \Rightarrow x+T \in D,\ x-T \in D$
   b) $f(x+T) = f(x),\ \forall x \in D$

nejmenší číslo T s těmito vlastnostmi se nazývá základní perioda.

12. Omezená na D, existuje-li číslo $K>0$ takové, že

$$|f(x)| \leq K, \ \forall x \in D$$

13. Prostá (injektivní) v D, když

$$\forall x_1, x_2 \in D,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

resp. $\quad x_1, x_2 \in D: \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

14. Prostá na H. $\quad f: D \to H$
   (bijektivní ≡ vzájemně jednoznačná)

Úkol: Který z následujících výroků je pravdivý.

   a) Je-li $f: D \to R$ ostře monotónní v D, potom je f prostá v D.
   b) Je-li $f: D \to R$ prostá v D, potom je ostře monotónní.
   c) Existuje funkce, která je prostá a není ostře monotónní?

4.5.3. Rovnice o jedné neznámé

Je dána funkce $f: D \to R$ a číslo $\bar{y} \in R$.
Úloha najít $\bar{x} \in D$ takové, že

$$f(\bar{x}) = \bar{y}$$

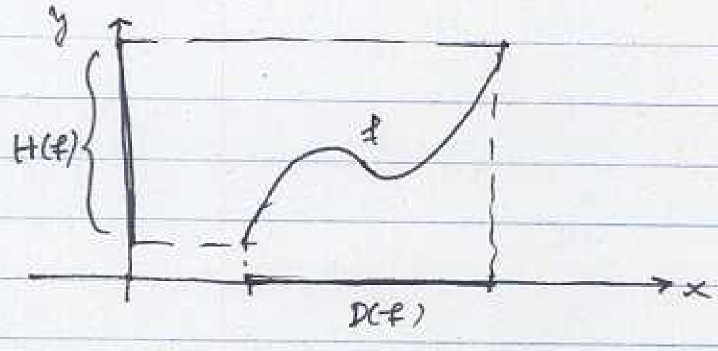
se nazývá rovnice o jedné neznámé a zapisuje se

$$f(x) = \bar{y}.$$

Číslo $\bar{x}$ se nazývá kořen nebo také řešení rovnice (úlohy)

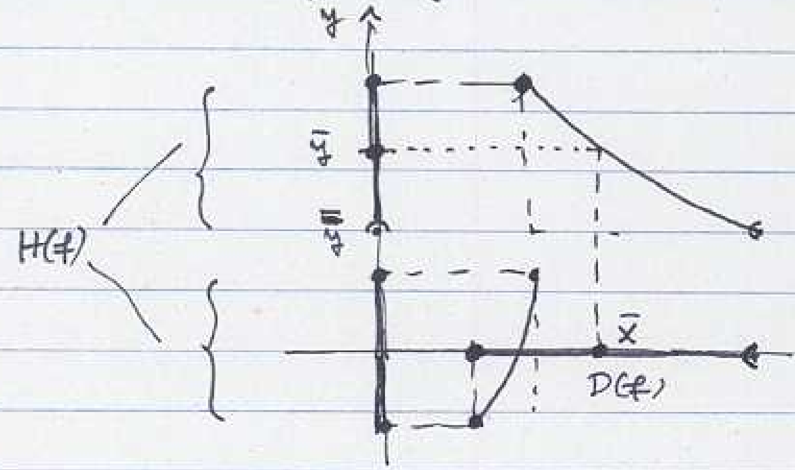
4.5.4. Řešitelnost rovnice $f(x) = \bar{y}$

$H(f) \subset R$ je obor hodnot funkce $f: D(f) \to R$



1. Když $\bar{y} \in H(f)$, potom rovnice $f(x) = \bar{y}$ má aspoň jeden kořen $\bar{x} \in D(f)$.
2. Když f je ostře monótonní na $D(f)$, potom rovnice $f(x) = \bar{y}$, $\bar{y} \in R$ má nejvýše jeden kořen $\bar{x} \in D(f)$
3. Když f je ostře monotónní na $D(f)$ a $\bar{y} \in H(f)$, potom rovnice $f(x) = \bar{y}$ má právě jeden kořen $\bar{x} \in D(f)$

3'. Když f je prostá (injektivní) na $D(f)$ a $\bar{y} \in H(f)$, potom rovnice $f(x) = \bar{y}$ má právě jeden kořen $\bar{x} \in D(f)$.



$\bar{\bar{y}} \notin H(f)$

rovnice $f(x) = \bar{\bar{y}}$ nemá řešení

např: a) rovnice $e^x = -2$ nemá řešení } v R

b) rovnice $x^2 = -7$ —"— } v R

c) —"— $x^2 = 5$ má dvě řešení v R

d) —"— $\sin x = 2$ nemá řešení v R

e) —"— $\cos x = \frac{1}{2}$ má nekonečně mnoho řešení v R

f) —"— $\cos x = \frac{1}{2}$ nemá řešení v $\langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$

g) —"— $\cos x = \bar{y}$, $\bar{y} \in \langle -1, 1 \rangle$ má právě jedno řešení na $D(f) = \langle 0, \pi \rangle$.

4.5.5. Inverzní funkce

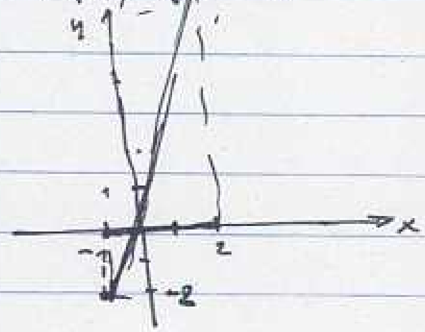
Mějme prostou funkci $f: D(f) \xrightarrow{na} H(f)$, tj. rovnice $f(x) = y$ má jediný kořen $x \in D$ pro každé $y \in H$. Funkce $\varphi: H \xrightarrow{na} D$, která každému $y \in H$ přiřazuje jediný kořen $x \in D$ rovnice $f(x) = y$ se nazývá <u>inverzní funkce k f</u> a značí se

$$f^{-1}: H \xrightarrow{na} D \quad (\text{místo } \varphi: H \xrightarrow{na} D).$$

~~ato taky~~ Zřejmě $\underbrace{H = D(f^{-1}),\ D = H(f^{-1})}$!!

$y = f(x),\ x \in D,\ y \in H$ $\qquad$ $x = f^{-1}(y),\ y \in H,\ x \in D$

jsou ekvivalentní!



Př: $f: \quad y = 3x + 1,\ x \in \langle -1, 2 \rangle = D(f)$

$y \in \langle -2, 7 \rangle = H(f)$

$f^{-1}: \quad x = \frac{1}{3} y - \frac{1}{3},\ y \in \langle -2, 7 \rangle = D(f^{-1})$

$x \in \langle -1, 2 \rangle = H(f^{-1})$

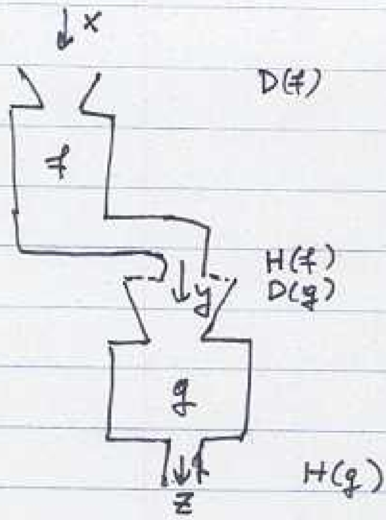
<u>Úkol</u>: 1) Sestrojte funkce inverzní k vhodné restrikci goniometrických funkcí

2) Sestrojte funkce inverzní k hyperbolickým funkcím

<u>Pozor</u>! K funkci $f: y = \sin x,\ x \in R$ <u>neexistuje</u> funkce inverzní.

<u>Otázka</u>: Jak se definují cyklometrické funkce?

4.5.6. Superpozice funkcí (≡ složená funkce)



$z = h(x)$

$x \in D(f) = D(h)$

$z \in H(g) = H(h)$

$y = f(x)$

$H(f) \subset D(g)$

$z = g(y)$

$$\boxed{z = g(f(x))}$$

Značí se $\underline{h = g \circ f}$ ... h je superpozice funkcí g a f v tomto pořadí

f ... vnitřní funkce

g ... vnější funkce

Př: 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(y) = \sin y$ $\Rightarrow g(f(x)) = \sin\sqrt{x}$;

2) $\Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{\sin x}$

$g \circ f \neq f \circ g$!

Úkol: Pro vzájemně inverzní funkce

$y = f(x)$, $x \in D$, $y \in H$

$x = f^{-1}(y)$, $y \in H$, $x \in D$

!

sestrojte grafy funkcí

$f \circ f^{-1}$, $f^{-1} \circ f$

a určete jejich definiční obory a obory hodnot.

Ilustrujte na zvolených příkladech:

např: $y = \ln e^x$, $y = e^{\ln x}$, $y = \sin(\arcsin x)$,

$y = \arcsin(\sin x)$, ... atd. !

4.5.7. Algebraické operace s funkcemi

Nechť funkce f a g mají týž definiční obor. Definujeme (formulujte slovně!)

1. Součet $f+g : x \in D \longrightarrow y = f(x) + g(x)$,
2. Rozdíl $f-g : x \in D \rightarrow y = f(x) - g(x)$,
3. Součin $f \cdot g : x \in D \rightarrow y = f(x)g(x)$
4. Podíl $\frac{f}{g} : x \in D \rightarrow y = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$,
5. Násobek číslem $\alpha f : x \in D \; y = \alpha f(x)$, $\alpha \in R$.

Příklady.

1. Načrtněte graf funkce: $y = x \sin x$
2. – " – $y = \frac{\sin x}{x}$
3. – " – $y = x + \sin x$
4. " $y = e^{-x} \cos x$
5. – " – $y = x + \operatorname{arctg} x$
6. " $y = x \operatorname{arctg} x$
7. Je součin (součet) dvou periodických funkcí periodická funkce? !! [není!] – proč?