3. Jednoduché diskrétní systémy

3.1. Posloupnost jako řešení diferenční rovnice

3.1.1 Diference a posloupnosti diferencí

Pro každou posloupnost $\{y_n\}$ $= \{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ můžeme stanovit posloupnost diferencí, tj. rozdílů sousedních členů;

tedy označujeme

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n \quad , \quad \forall n \in N .$$

$$\{\Delta y_n\} = \{\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3, \dots\}.$$

Z takto vzniklé posloupnosti můžeme opět stanovit posloupnost diferencí, tj. diferencí z diferencí; označíme pak

$$\Delta y_{n+1} - \Delta y_n = \Delta(\Delta y_n) = \Delta^2 y_n = (y_{n+2} - y_{n+1}) - (y_{n+1} - y_n) =$$
$$= y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n ;$$

atd.:

$$\Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n = \Delta(\Delta^2 y_n) = \Delta^3 y_n$$

Obecně

$$\Delta^k y_n = \Delta(\Delta^{k-1} y_n) = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n$$

Např.: $\{y_n\} = \{3, 5, 7, 9, \dots\} \Rightarrow \xi\!\!\!\!\xi\;\; y_{n+1} = y_n + 2$;

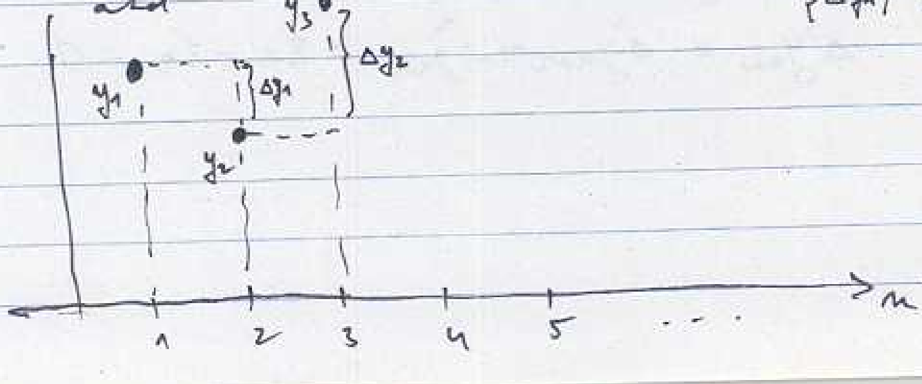
$$\{\Delta y_n\} = \{2, 2, 2, \dots\}$$

$$\{\Delta^2 y_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$$
$$\{\Delta^3 y_n\} = \{0, 0, 0, \dots\}$$

atd.

$\{\Delta y_n\}$ posloupnost přírůstků (úbytků)

Graf:



3.1.2 Rekurentně dané posloupnosti vyjádřené pomocí diferencí

Například posloupnost $\{y_n\}$ určenou formulí

$$y_{n+1} = 3\, y_n \qquad (\text{geometrická posloupnost s } q = 3)$$

lze upravit:

$$y_n = 3\, y_{n-1}$$

$$y_{n+1} - y_n = 3(y_n - y_{n-1}) \longleftrightarrow \boxed{\Delta y_n = 3 \Delta y_{n-1}},$$

tj. každá diference je trojnásobkem předchozí diference

Je vidět, že:

$$3 = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{\Delta y_n}{\Delta y_{n-1}} = \frac{\Delta^2 y_n}{\Delta^2 y_{n-1}} = \dots \, ?!$$

Př.:

$$\{y_n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \dots\} = \{2^{n-1}\} : y_{n+1} = 2 y_n$$

$$\{\Delta y_n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots\}$$

$$\{\Delta^2 y_n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \dots\}$$

Pozorování: $\Delta 2^{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$

$$\Rightarrow \{\Delta 2^{n-1}\} = \{2^{n-1}\}$$

„Daná (geom.) posloupnost se diferencováním nemění".

Úkol: Prověřit, zda tuto vlastnost mají i jiné posloupnosti!

Př.: Posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; $y_n = \frac{n}{n+1}$ se dá rekurentně vyjádřit ve tvaru $y_{n+1} = \frac{1}{2 - y_n}$, $y_1 = \frac{1}{2}$ (odst. 2.1.1).

Pomocí diferencí bychom ji zapsali takto:

$$\Delta y_n = \frac{\Delta y_{n-1}}{4 - 2\Delta y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n-2)}}.$$

Prověřte!

3.1.3. Jednoduché aplikace

Celá řada technických, biologických, ekonomických, ekologických ~~…~~ zákonitostí má charakter rekurencí.

Př: Ekonomický růst: V roce $n=1$ je HDP $y_1 = 250$ (mld. Kč), Každým rokem se přírůstek HDP zvyšuje p krát; $p = 0{,}08 \equiv 8\%$

a) Jaký bude HDP za n let

b) Za kolik let dosáhne HDP 2000 mld. Kč.

Zákonitost zapíšeme ve tvaru

$$\Delta y_n = 0{,}08\, y_n, \quad y_1 = 250$$

tj. $$y_{n+1} - y_n = 0{,}08\, y_n$$

tj. $$y_{n+1} = (1+0{,}08)\, y_n = 1{,}08\, y_n;$$

Odpovědi na dané otázky dostaneme, umíme-li členy posloupnosti dané uvedenou rekurencí:

$$y_n = (1{,}08)^{n-1} \cdot 250 \quad ; \quad \begin{aligned} y_1 &= 250 \\ y_2 &= 270 \\ y_3 &= 291{,}6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

odp. a) za $n = 8$ bude HDP $\underline{y_9} = (1{,}08)^8 \cdot 250 = 462{,}7325\ldots$

odp. b) $2000 = (1{,}08)^{n-1} \cdot 250$; určit n:

$$\frac{2000}{250} = (1{,}08)^{n-1} \Rightarrow n-1 = \frac{\ln 8}{\ln 1{,}08} = 27{,}0194\ldots$$

≈ za 27 let dosáhneme HDP = 2000 .

3.2. Odezva diskrétního systému na počáteční stav

3.2.1. Diferenční rovnice.

Mějme nějaký vztah typu

a) $y_{n+1} = F_1(n, y_n)$ — jednokroková rekurence

např.: $y_{n+1} = a y_n + b$ a, b konstanty - dané
$y_{n+1} = a_n y_n + b_n$, $\{a_n\}, \{b_n\}$ jiné dané posloupnosti.

b) $y_{n+1} = F_2(n, y_n, y_{n-1})$ — dvoukroková rekurence

např.: $y_{n+1} = a y_n + b y_{n-1} + c$ ... konst. koef.
$y_{n+1} = a_n y_n + b_n y_{n-1} + c_n$, - proměn. koef.

c) $y_{n+1} = F_3(n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2})$ — tříkroková rekurence

např.: $y_{n+1} = a_n y_n + b_n y_{n-1} + c_n y_{n-2} + d_n$

— — — atd. - - -.

v němž vystupují členy nějaké posloupnosti $\{y_n\}$.

Úlohu najít posloupnost $\{y_n\}$ vyhovující daný vztah (rekurenci) nazýváme diferenční rovnice. Řešením diferenční rovnice je posloupnost $\{y_n\}$, která diferenční rovnici vyhovuje pro každé n. Řešení není určeno jednoznačně, závisí na hodnotách startovacích = počátečních členech.

Příklady.

a) Stanovme řešení diferenční rovnice

$$y_{n+1} = 2y_n + b^n, \quad b \neq 0$$

$$y_1 = \text{dáno (např. } y_1 = 1).$$

Postupujme dosazováním:

$$y_2 = 2y_1 + b^1$$

$$y_3 = 2y_2 + b^2 = 2(2y_1 + b) + b^2 = 2^2 y_1 + 2b + b^2$$

$$y_4 = 2y_3 + b^3 = 2(2^2 y_1 + 2b + b^2) + b^3 = 2^3 y_1 + 2^2 b + 2b^2 + b^3$$

$$\dots\dots$$

$$y_k = 2^{k-1} y_1 + 2^{k-2} b + 2^{k-3} b^2 + \dots + b^{k-1} = b(2^{k-2} + 2^{k-3} b + \dots + b^{k-2})$$

$$= 2^{k-1} y_1 + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{k-1-j} b^j = 2^{k-1} y_1 + b \frac{2^{k-1} - b^{k-1}}{2-b}; \quad \underline{\underline{b \neq 2}} \;!?$$

Pomocí vzorce: $2^m - b^m = (2-b)(2^{m-1} + 2^{m-2} b^1 + 2^{m-3} b^2 + \dots + 2^1 b^{m-2} + b^{m-1})$

b) Postupným dosazováním stanovte řešení $\{y_n\}$ diferenční rovnice

$$y_{n+1} = 2y_n + 3,$$

pro $\quad y_1 = 1 \quad$ (startovací, počáteční hodnota)

Výpočet:

$$y_2 = 2 + 3 = 5$$
$$y_3 = 2\cdot 5 + 3 = 13$$
$$y_4 = 2\cdot 13 + 3 = 29$$
$$\vdots \quad \text{atd}$$
$$y_k = 2^{k-1}\cdot 4 - 3\ ;$$ lze odvodit postupem z př. a)

~~Podle příkladu a) lze získat vzorec pro n-tý člen:~~

b) Ukažte, že řešením diferenční rovnice

$$\Delta^2 y_n = 0 \quad , \text{tj. rovnice} \quad y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$$

je posloupnost určená vzorcem pro n-tý člen

$$\boxed{y_n = (y_1 - \Delta y_1) + n\cdot \Delta y_1}\ , \quad y_1,\ y_2 = y_1 + \Delta y_1 \ \text{libovolné}$$

Poznámka: K jednoznačnému určení řešení musíme zadat
buď dvojici čísel $\quad y_1, y_2$,
nebo dvojici čísel $\quad y_1, \Delta y_1$.

3.2.2. Počáteční úlohy.

(A) Úloha najít posloupnost $\{y_n\}$, která je řešením diferenční rovnice (1. řádu, s konst. koeficientem, nehomogenní)

$$y_{n+1} = 2y_n + b^n \quad , \quad b \neq 0 \text{ je dané číslo}$$

a platí

$$y_1 = c \quad , \quad c \text{ je dané číslo}$$

se nazývá počáteční úloha (pro danou diferenční rovnici).

Řešením této počáteční úlohy je (viz odst. 3.2.1) posloupnost $\{y_n\}$, kde

$$y_n = 2^{n-1} c + b\frac{2^{n-1} - b^{n-1}}{2-b} \quad , \quad b \neq 2.$$

Poznámka: Pro $b=2$ nefunguje poslední vzorec.
~~Analogicky~~ Metodou postupného dosazování dostaneme řešení počáteční úlohy

$$y_{n+1} = 2y_n + 2^n, \; y_1 = c \quad \text{ve tvaru}$$

$$y_n = 2^{n-1} c + (n-1)2^{n-1} .$$

(B) Pro diferenční rovnici (2. řádu, s konst. koef., homogenní) řešte následující počáteční úlohy (postupným dosazováním)

(B₁) $$y_{n+2} = \frac{10}{3} y_{n+1} - y_n \; , \quad y_1 = 1, \; y_2 = \frac{1}{3} \; ;$$

(B₂) $$y_{n+2} = \frac{10}{3} y_{n+1} - y_n \; , \quad y_1 = 1, \; y_2 = 3 \; .$$

Výsledky: (B_1) : $y_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$;

(B_2) : $y_n = 3^{n-1}$;

3.2.3. Technická terminologie

Matem. slovník	Technický slovník
Počáteční úloha pro diferenční rovnici	Diskrétní systém
počáteční (startovací) hodnoty y_1, resp. $y_1, y_2, \dots$ atd	počáteční stav diskrétního systému
Řešení počáteční úlohy, tj. posloupnost vyhovující diferenční rovnici a vyhovující zadaným poč. ~~~~ podmínkám	Odezva diskrétního systému na počáteční stav

3.3. Metody řešení diferenčních rovnic

3.3.1. Metoda postupného dosazování

Je poněkud „nádenická" (viz příklady v předchozích odstavcích).

Je použitelná vždy, ale u složitějších počátečních úloh musíme mít k dispozici elektronický informační zpracovatel (≡ počítač)

Ve většině případů se musíme vzdát představy, že získáme řešení (= výsledek) ve tvaru vzorečku pro n-tý člen.

3.3.2. Metoda charakteristické rovnice a variace konstant

S principem této metody se seznámíte u počátečních úloh pro diferenciální rovnice.

Je použitelná pouze pro rovnice lineární a s konstantními koeficienty !!

3.3.3. Metoda Z-transformace

Formální, tj. výpočtová metoda použitelná pouze pro rovnice s konstantními koeficienty. Seznámíte se s ní v ME4 (tj. ve 4. semestru).

V technických knihách velmi oblíbená pro svoji výpočetní úspornost.

3.4. Příklady jednoduchých diskrétních systémů

3.4.1. Úloha spoření.

$$y_{n+1} = 1{,}1\, y_n + 100$$

$$y_1 = 1000.$$

K počátečnímu vkladu 1000 Kč na konci každého měsíce ukládáme 100 Kč s 10% úrokem $\left(1{,}1 = 1 + \frac{1}{10}\right)$.

3.4.2. Samuelsonův model dynamiky národního důchodu

Ozn.: I_n – národní důchod v roce n,
a – minimální tendence spotřeby,
b – tzv. ekonomický akcelerátor,
G – vládní (státní) výdaje (náklady):

$$I_{n+2} - a(1+b) I_{n+1} + ab\, I_n = G.$$

Prověřte, že pro $I_1 = \frac{G}{1-a}$, $I_2 = \frac{G}{1-a}$, že $I_n = \frac{G}{1-a}$, $n \geqq 3$.

3.4.3. Logistický model v biologii a ekonomii

Jestliže y_n označuje stav populace (resp. stav produkce) v období n, pak bylo pozorováno, že relativní přírůstky se zmenšují. Příslušný zákon se dá vyjádřit např. ve tvaru $\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n} = 1 - \frac{1}{100} y_n$.

Posloupnost $\{y_n\}$ je nejen omezená, ale dokonce konvergentní pro $y_1 = ?$
Limita se nazývá kapacita prostředí.

3.4.5. Spojitojší diskrétní systémy

Chování složitějších diskrétních systémů se popisuje soustavou diferenčních rovnic, jejíž řešení je posloupnost vektorů $\{\mathbf{y}_n\}$; $\mathbf{y}_n = [y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{n,M}]^T$; $\mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^M$

Problémy tohoto druhu zatím přesahují vaši připravenost. Podotkněme pouze:

a) v odst. 3.2.1 jsme uvedli, že řešení diferenční rovnice (lineární) 1. řádu s konstantními koeficienty

$$y_{n+1} = a y_n + b^n \quad , \quad a, b \text{ jsou konstanty;}$$

je posloupnost $\{y_n\}$ určená formulí pro k-tý člen

$$y_k = a^{k-1} y_1 + \sum_{j=1}^{k-1} a^{k-1-j} b^j .$$

b) soustava diferenčních rovnic (lineární, 1. řádu, s konst. koeficienty)

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_n + \mathbf{b}^n \quad , \quad \mathbf{A} \text{ je čtvercová matice řádu } M$$

$\mathbf{b}$ je konst. vektor o M složkách

má řešení $\{\mathbf{y}_n\}$ určené formulí

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{y}_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \mathbf{A}^{k-1-j}\mathbf{b}^j .$$

(Všimněte si laskavě „nápadné“ analogie)

c) <u>Stabilita systému</u> popsaného počáteční úlohou pro diferenční rovnici se posuzuje na základě omezenosti posloupnosti, která takový systém popisuje.