2. Posloupnosti čísel, – speciální podmnožiny se spec. vlastnostmi } posloupnosti v $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

V této kapitole budeme hovořit o matematických objektech, kterým říkáme posloupnosti. Cílem je, abyste uměli odpovídat na řadu otázek a uměli řešit řadu problémů souvisejících s vaší budoucí odborností:

— co to je?
— jak se to zapisuje?
— jak se s tím zachází (počítá)?
— k čemu je to dobré?
— na jaké vlastnosti soustředíme pozornost?
— co je užitečné vědět o posloupnostech?
— atd.

2.1. Posloupnost jako model diskrétního systému

Odpověď na otázku, co je posloupnost (tj. definice posloupnosti) závisí na stupni vzdělanosti toho, komu je odpověď určena.
Např. jak vysvětlit pojmy: počítač, Internet, frekvenční modulátor,

2.1.1. Definice a ilustrace ~~označení~~.

a) Posloupnost je obvykle nekonečná skupina čísel vázaných (vytvořených) nějakým vnitřním pravidlem množinou, nějakou zákonitostí z podkladu (příklady!)

b) Posloupnost čísel (komplexních, reálných, racionálních, ...) je zobrazení, které každému přirozenému číslu $n \in \mathbb{N}$ (nebo každému číslu k z nějaké (nekonečné) podmnožiny $\tilde{N} \subset \mathbb{N}$ množiny přirozených čísel přiřazuje číslo $y_n \in H$, kde H je nějaká podmnožina $\mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{Q}$, ... atd.

y_n ... n-tý člen posloupnosti (hodnota v čísle n, obraz)

n ... index (argument, vzor)

$n \longrightarrow y_n$

Když $H \subset \mathbb{C}$: posloupnost komplexních čísel
Když $H \subset \mathbb{R}$: posloupnost reálných čísel

Př.: Posloupnost čísel (z Q) udávajících vývoj světového rekordu ve skoku dalekém (v metrech):

$$5{,}85 \;;\; 6{,}01 \;;\; 6{,}35 \;;\; \dots \;;\; 8{,}13 \;;\; \dots \;;\; 8{,}90 \;;\; \dots$$
$$y_1 \qquad y_2 \qquad y_3 \qquad \dots \qquad y_{28} \qquad\qquad y_{35}$$

- posloupnost je dána výčtem členů
- posloupnost je ~~neklesající, resp.~~ rostoucí (ostrě)

Př.: Posloupnost čísel z Q udávajících vývoj světového rekordu v běhu na 100m:

$$11{,}20 \;;\; 11{,}00 \;;\; 10{,}80 \;;\; \dots \;,\; 10{,}20 \;;\; \dots \;;\; 9{,}78 \;;\; \dots$$

- posloupnost je dána výčtem členů
- posloupnost je klesající (ostrě)

Př.: Vzorec $y_n = \frac{n}{n+1}$ definuje posloupnost $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ tj. posloupnost $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$;

tuto posloupnost lze také určit formulí $y_{n+1} = \frac{1}{2-y_n}$, $y_1 = \frac{1}{2}$ tzv. rekurentní formule (rekurence)

~~Př.~~ Pozor! Formule

$$y_{n+1} = \frac{1}{2-y_n}, \quad y_1 = 1$$

určuje jinou posloupnost (zákon?)

Př.: Vzorec $z_n = \frac{1}{n} + i\,2^n$ definuje posloupnost $\left(\frac{1}{n} + i\,2^n\right)_{n=1}^{\infty}$ komplexních čísel

$$\left(1+2i,\; \tfrac{1}{2}+4i;\; \tfrac{1}{3}+8i;\; \dots\right)$$

Zápisy: a) vzorcem pro n-tý člen: $(y_n)_{n=1}^{\infty}$;

konkrétně např. $\left(2^{n-3}\right)_{n=1}^{\infty}$ nebo $y_n = 2^{n-3}$;

b) výčtem členů — viz výše

c) rekurentně: (nejednoznačně definovaná) $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$;

$y_{n+1} = a\,y_n$; atd

a) — nejvhodnější pro matematickou analýzu zákonitostí
c) — nejvhodnější pro aplikace (viz kap. 3) — rekurentní
b) — nemá žádné přednosti ; pouze nápomocné
výjimečně

Přechody : (a) → (b) ; (c) → (b) jednoduché
(a) → (c), (c) → (a) možné, ale ne vždy jednoduché
(b) → (a) ; (b) → (c) až na elementárnosti obtížné!

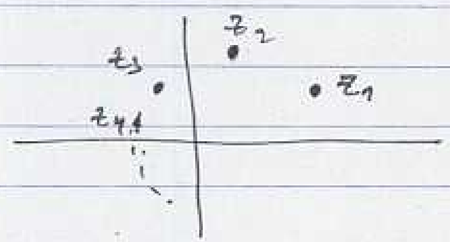
Tyto elementárnosti jsou součástí souboru středoškolských příkladů :
Např.: Najděte vzorec pro n-tý člen u posloupnosti
$(1, 4, 9, 16, 25, \dots) \longrightarrow x_n = n^2$, tj. $(n^2)_{n=1}^{\infty}$

Poznámka. Názvy : aritmetické, geometrické, rekurentní, rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, konvergentní, divergentní, oscilující, ... charakterizují ~~pouze~~ (vydělují) posloupnosti podle nějaké specifické vlastnosti!

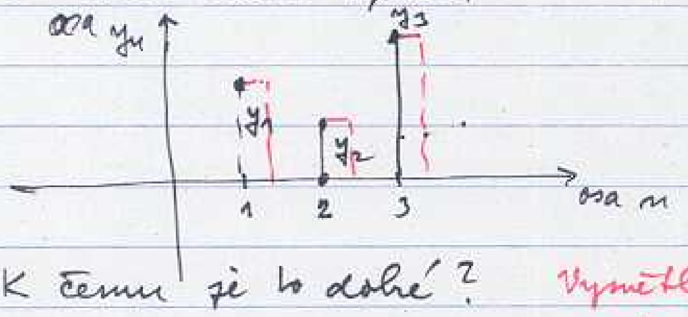
2.1.2. Grafické znázornění posloupností

a) jako body na reálné ose :

b) jako body v Gaussově rovině :



c) v souřadnicovém systému



sloupcové grafy

Otázka : K čemu je to dobré ? Vysvětli analfabetovi, že má umět číst, psát, počítat.

Odpověď : — k prognozování, k předpovídání, k odhadům vývoje, k záznamu závislostí, k odhadům změn vývoje
— ze znalosti několika hodnot a ze znalosti principu, určit hodnoty následující (rekurence!)

2.1.3 Operace s posloupnostmi – manipulace s posloupnostmi

Součet: $(a_n)_{n=1}^{+\infty} + (b_n)_{n=1}^{+\infty} = (a_n+b_n)_{n=1}^{+\infty}$, $\leftrightarrow$ $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$

Rozdíl: $(a_n)-(b_n)=(a_n-b_n)$,

Součin: $(a_n)\cdot(b_n)=(a_n\cdot b_n)$,

Podíl: $\dfrac{(a_n)}{(b_n)}=\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, $b_n\neq 0\ \forall n\in N$;

Př: $(a_n)=(n^2)=(1,4,9,16,25,\dots)$

$(b_n)=(n+3)=(4,5,6,7,\dots)$

$$\frac{(n^2)}{(n+3)}=\left(\frac{n^2}{n+3}\right)=\left(\frac{1}{4},\frac{4}{5},\frac{9}{6},\frac{16}{7},\dots\right)$$

2.2. Vlastnosti posloupností

2.2.1. Omezenost ~~a monotonie~~

motivace: Žádný člen posloupnosti ... nepřevýší } nějaké číslo
Všechny členy posloupnosti ... jsou menší než nějaké číslo

$((-1)^n)$, $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$, $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ... atd

{ nějaké (kladné) číslo; intuitivně se dá uhádnout.

Posloupnost (y_n) je <u>omezená</u>: a) $\exists K>0\ \forall n\in N: |y_n|\leq K$

b) $\exists K_1,K_2\in R\ \forall n\in N: K_1\leq y_n\leq K_2$

Úkol: Vysvětlete pojmy:
- omezená shora
- omezená zdola
- neomezená (shora, zdola)

} ilustrace

Např: Posloupnost $\{2^n\}$ je <u>neomezená</u>, tj. <u>není omezená</u>

Obecně: $\forall K>0\ \exists n_1\in N: |y_{n_1}|>K$.

Př: Připustíme, že $\{2^n\}$ je omezená ~~posloupnost~~; pak musí existovat $K>0$, že $|2^n|\leq K\ \forall n\in N$

$2^n\leq K \Rightarrow n\log 2\leq \log K$ log ... pro jakýkoli základ

$n\leq\dfrac{\log K}{\log 2}$

tj. nerovnost neplatí pro všechna <u>n</u> !!

! Př: Supremum a infimum posloupnosti; opak. omez. posl.

[2.2.2] Monotonie a ostrá monotonie

		ČR	jinde
Když $\forall n \in N$:	$a_{n+1} > a_n$	rostoucí	— ostře rostoucí
-"-	$a_{n+1} < a_n$	klesající	— ostře klesající
-"-	$a_{n+1} \geqq a_n$	neklesající	— rostoucí
-"-	$a_{n+1} \leqq a_n$	nerostoucí	— klesající
-"- —			

Př: Mějme (máme) posloupnost $(q^n) = (q, q^2, q^3, \dots)$, kde q je nějaké číslo. Zjistěte:

a) pro jaké q je posloupnost omezená

b) pro jaké q je posloupnost rostoucí (klesající).

ad a) chceme vědět pro jaké q platí výrok:

$$\exists K>0\ \forall n \in N: |q^n| \leqq K$$

$$|q|^n \leqq K \iff n \log|q| < K :$$

tato nerovnost bude platit pro všechna $n \in N$ pouze když

$\log|q| \leqq 0 \iff |q| \leqq 1$ $\quad (0 < |q| \leqq 1)$

! můžeme připustit i $q=0$ (nelze logaritmovat!), neboť $0^n < K$ $\forall n \in N$ a $\forall K>0$

→ $n > \frac{K}{\log|q|}$

ad b) Prověřme platnost nerovnosti

$$q^n < q^{n+1} \quad | q^n > 0$$

Tj. hledáme řešení nerovnice typu $x^n < x^{n+1}$:

pro $x>0$: $1 < x$ (krácením x^n): řešení: $\underline{\underline{x>1}}$

pro $x<0$: nebude $x^n < 0$ pro každé x (mění znaménko) nerovnice nemá řešení!!

!! Úkol: Zjistit, kdy $\lim a_n = \sup\{a_n\}$ $= \inf\{a_n\}$ $=$ } ⟹ Formulujte příslušný výrok!! (mat. věta)

2.2.3. Příklady diskrétních systémů — příloha ke str. 2.6

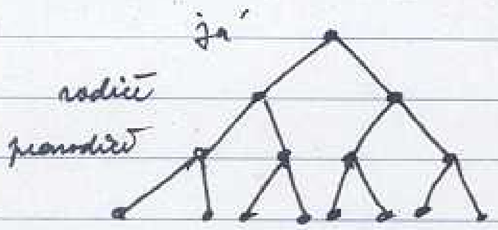
1. Biologové si kladou otázku, zda počty okvětních lístků rostlin nevykazují nějakou obecnou zákonitost.

Bylo zjištěno, že

počet okvětních lístků	~~typ~~ rostlina
3	lilie, kosatec
5	blatouch
8	delphinium (stračka)
13	kukmoce, chrpa
21	astra
34	sedmikráska
55	-"-
89	"
⋮	

?? $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$ Je to opravdu takto?

2. Počet předků v n-té generaci:



$n = 1$ $y_1 = 1 = 2^0$

$n = 2$ $y_2 = 2 = 2^1$

$n = 3$ $y_3 = 4 = 2^2$

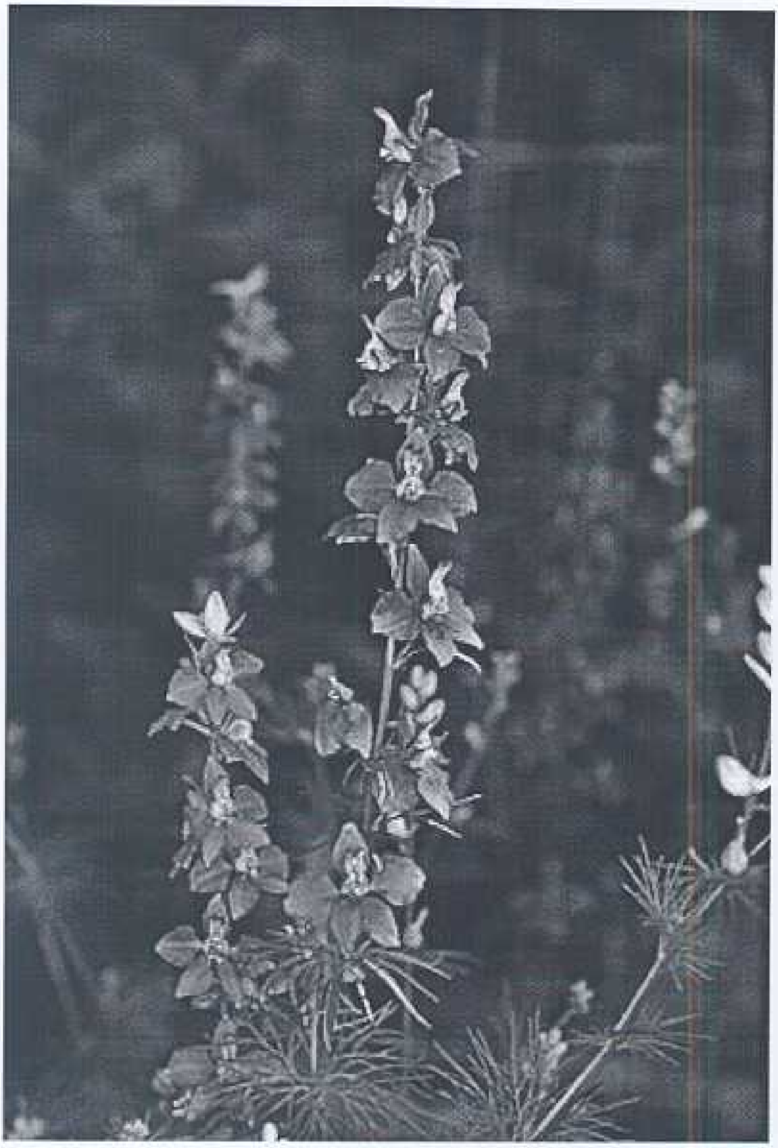
$n = 4$ $y_4 = 8 = 2^3$

⋮

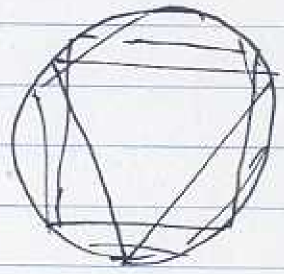
n $y_n = 2^{n-1}$;

$y_{20} = 2^{19} = 524288$

Přibližně 4 generace za 100 let: ⇒ před 1000 lety: $y_{40} = 2^{39} \approx 5{,}49 \cdot 10^{11}$

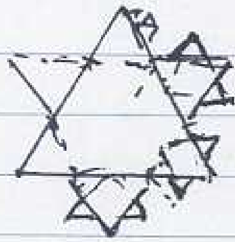


3. Urči postupnosť obsahov n-uholníkov vpísaných do jednotkového kruhu:



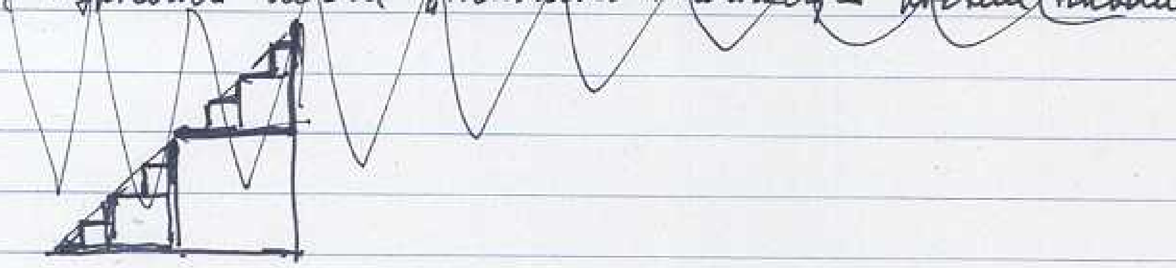
— uhol: vypočítať

4. Urči obsah snehovej vločky!
Vytvoríme špeciálnu postupnosť obrazcov z rovnostranných trojuholníkov:

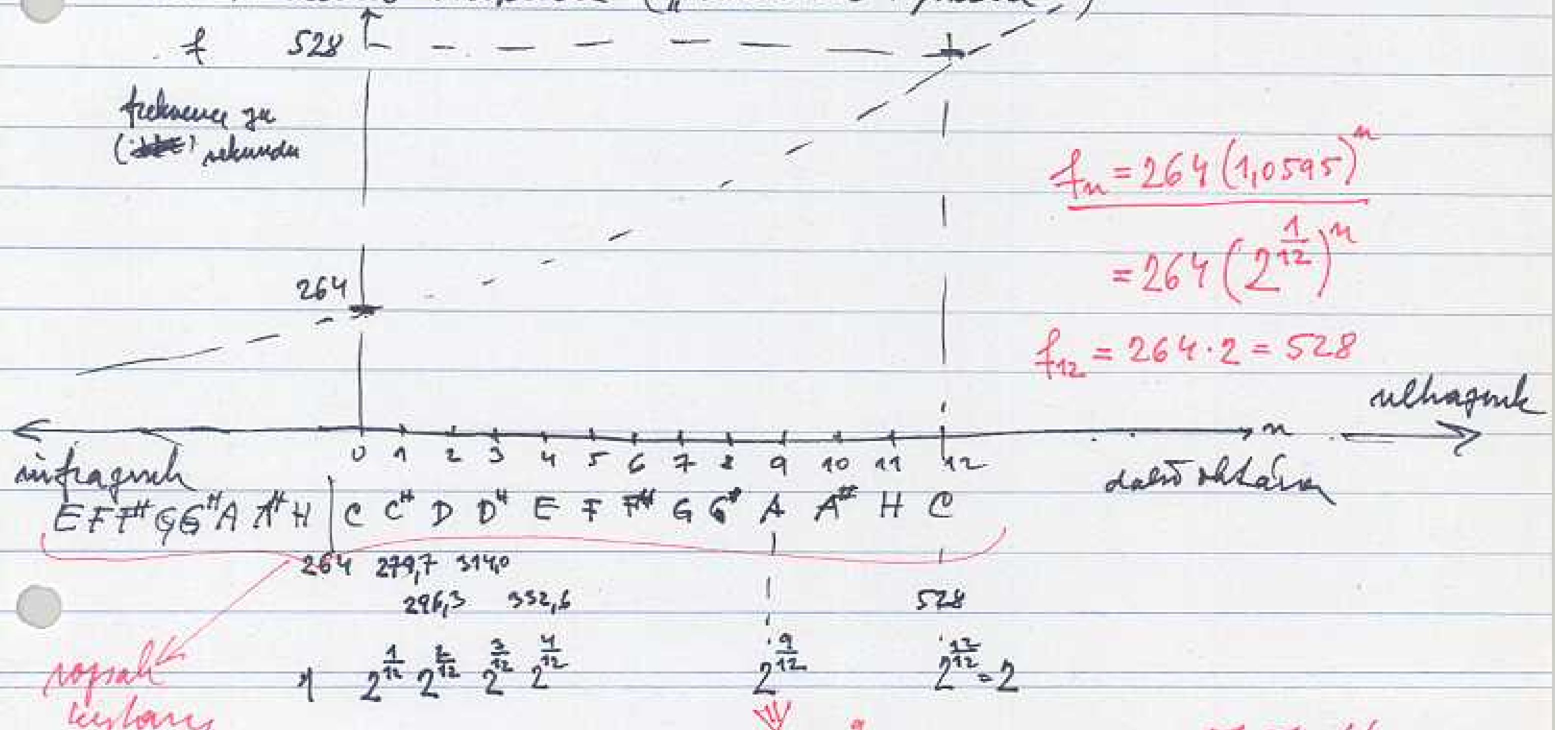


— tretinové delenie

Vypočítať dĺžku „schodiště" s nekonečným počtom schodov



5. Hudobná stupnica („hudobný systém")



$$f_n = 264\,(1{,}0595)^n$$
$$= 264\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^n$$
$$f_{12} = 264\cdot 2 = 528$$

$264\cdot 2^{\frac{9}{12}} = 444 = f_9$ ... kmitočet tónu a

Poznámka: Definice omezenosti je „šitá na míru" pro posloupnosti dané n-tým členem; pro posloupnosti určené rekurentně je ověřování (dokazování) omezenosti pracnější (u složitějších rekurencí).
Posloupnostmi danými rekurentně se budeme podrobněji zabývat později (3. kapitola sylabu). !

[2.2.3] Příklady diskrétních systémů
Co je systém?
Co je diskrétní systém? viz příloha
- kočičí systém (strom, rostliny)
- pokorná zádušnka - systém ...
- ekosystém = les, rybník = ...
→ „posloupnostní" systém = diskr. systém = ...

2.3. Asymptotické chování posloupností

- chování (vývoj) pro velmi velká n ≡ $\underbrace{n \to +\infty}_{\text{značka}}$

- konvergentní
- divergentní
} chování.

2.3.1. Konvergentní posloupnost

- slovní ilustrace a obrázková ilustrace „konvergentního chování"

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ je konvergentní v $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$), má-li tuto vlastnost:

$$\exists a \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: (n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

stručně: od indexu n_0 (n_0+1) počínaje se rozdíl $a_n - a$ (v abs. hodnotě) stává libovolně malým: leží v intervalu $(-\varepsilon, \varepsilon)$

tj. $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$!!

Píšeme: $a_n \to a$

nebo $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$ → celý zápis je šifrou kryptogramu; vnímáme ho jako celek

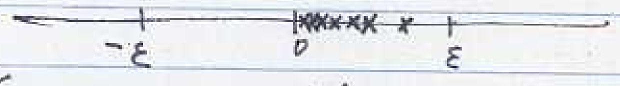
Číslo a se nazývá limita dané posloupnosti.

Př: Chceme zjistit, zda posloupnost $\left(2+\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{+\infty}$ je konvergentní.

a) metoda odhadu:

$$\left(2+\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{+\infty} = \left(3, 2\tfrac{1}{2}, 2\tfrac{1}{3}, 2\tfrac{1}{4}, \dots, 2\tfrac{1}{10}, \dots; a_{1000} = 2{,}001, \dots\right)$$

Posloupnost rozdílů $a_n - a$: $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{10}, \dots, \frac{1}{1000}, \dots\right)$



b) metoda zdůvodnění odhadu: ptáme se na platnost nerovnosti

$$\left|2+\frac{1}{n}-2\right| < \varepsilon \quad \text{resp.} \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$$

pro $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ~~$\varepsilon = \frac{1}{100}$~~ $n > 100$

$\varepsilon = 1000$ je $n > 1000$ } pro $n > 1000$ je $|a_n - a| < \frac{1}{1000}$

Př: odhadněte a zdůvodněte, že:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad \frac{n}{n+1} \to 1, \quad \frac{n+1}{n} \to 1,$$

„nemá limitu"

$$\frac{n+1}{n^2+1} \to 0, \quad \cos\frac{1}{n} \to 1; \quad \left(2-\frac{1}{n^2}\right)^2, \quad \ln\left(1+\frac{1}{1+n}\right) \to 0.$$

Posloupnost, která není konvergentní se nazývá divergentní.

– negace vlastnosti konvergence:

$$\forall a \in C \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in N \ \exists n : (n > n_0 \wedge |a_n - a| \geq \varepsilon)$$

! Poznámka:

$$\overline{V_1 \wedge V_2} \Leftrightarrow \overline{V_1} \vee \overline{V_2}$$
$$\overline{V_1 \vee V_2} \Leftrightarrow \overline{V_1} \wedge \overline{V_2}$$
$$\overline{V_1 \Rightarrow V_2} \Leftrightarrow V_1 \wedge \overline{V_2}$$
$$V_1 \Rightarrow V_2 \Leftrightarrow \overline{V_2} \Rightarrow \overline{V_1}$$
$$V_1 \Leftrightarrow V_2 \Leftrightarrow V_1 \wedge V_2 \vee \overline{V_1} \wedge \overline{V_2}$$
$$V_1 \Leftrightarrow \overline{\overline{V_1}} \quad \text{tj. negace negace}$$
$$V_1 \vee \overline{V_1}$$

logické zákony = vždy pravdivé výroky,

pravdivostní hodnoty $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Př: $\left(\frac{1}{n} + i\,2^n\right)$: $\frac{1}{n} \to 0$; (2^n) diverguje (neexistuje limita)

↳ kdyby konvergovala k číslu a, pak by muselo platit $-\varepsilon < 2^n - a < \varepsilon$ pro $n > n_0$ tj. $n < \frac{\ln(\varepsilon + a)}{\ln 2}$!! výklad

Př: $\left(\frac{n}{n+1} + i\,\frac{3n}{n+5}\right) \to 1 + 3i$ konverguje

Př: $\left(\frac{n^2+1}{n} + i\,\frac{\sin n}{n}\right)$ – diverguje: $\frac{n^2+1}{n}$ diverguje; $\frac{\sin n}{n}$ diverguje } proč? jak se to zapíše

Př: $\sqrt[n]{a} \to 1$, $a > 0$;
$\sqrt[n]{n} \to 1$;
$\frac{a^n}{n!} \to 0$, $a > 0$

Př: (!! důležité!) $q^n \to 0$, když $|q| < 1$
$q^n \to 1$, když $q = 1$
— když $|q| > 1$ nebo $q = -1$, posl. (q^n) diverguje

! Kdo bude chtít projít na konzultaci, zdůvodnění uvedených tvrzení bude vstupenkou (vstupním testem)

v placeném školství by to bylo aspoň 500 Kč.

2.3.2 Vlastnosti konvergentních posloupností

Důležité věty:

V1: Každá konvergentní posloupnost má právě jednu limitu

V2: Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu (jednu nebo žádnou)

V3: Každá konvergentní posloupnost je omezená

V4: Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost

V5: Když pro konvergentní posloupnosti platí $a_n \le b_n$ $\forall n > n_0$, pak $\lim a_n \le \lim b_n$. [V5 nelze formulovat pro posl. kompl. čísel]

V_6: $(a_n \leq b_n \leq c_n \ , \forall n > n_0) \wedge (a_n \to a \ , c_n \to a) \Rightarrow b_n \to a$
(věta o sevření)

V_7: $a_n \to a, b_n \to b \Rightarrow a_n \pm b_n \to a \pm b$;
$\Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$, $b \neq 0$!
$\Rightarrow a_n b_n \to ab$

algebra limit

na těchto větách (především V_7) je založena technika výpočtu limit

Př: Rozhodnout o konvergenci posloupnosti

$$y_n = e^{\left(\frac{2n^2+3n-7}{3n^2-n+1}\right)^{2-\frac{1}{n}}} ;$$

$$\frac{2n^2+3n-7}{3n^2-n+1} = \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}{n^2\left(3-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)} \to \frac{2}{3}$$

$$2-\frac{1}{n} \to 2$$

tedy $\lim y_n = \cancel{\left(e^{\left(\frac{2}{3}\right)}\right)^2} = e^{\frac{4}{9}}$

! Je vždy užitečné vypočítat prvních 5, 10, 50, 10, ... 10000, daní členů posloupnosti ⇒ představa o chování (průběhu) dané posloupnosti

V_8: Každá omezená {rostoucí / klesající} posloupnost je konvergentní
(y_n rost. ∧ y_n je omezená) ⇒ y_n je konvergentní ; pozor obrácený výrok neplatí!

! Př: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ... Vypočítat několik tisíc prvních členů posloupnosti.
⇒ odhad limity ;
⇒ důkaz konvergence : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$
– posl. je rostoucí ∧ omezená

$\boxed{\lim \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}}$

! Úkol: Posoudit konvergenci $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$:
$s_1 = 1, s_2 = 1+\frac{1}{2}, s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}, \dots$

Odpověď na konzultaci

2.3.3 Konvergence posloupností daných rekurentně

Nechť posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je určena rekurentní formulí

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_1 \text{ zvolíme.}$$

Pak z této formule můžeme vypočítat jednotlivé členy posloupnosti. Je-li posloupnost konvergentní, tj.:

$$x_n \to a, \ (x_{n+1} \to a); \ \text{pak} \ \varphi(x_n) \to \varphi(a) \ (\varphi \text{ spojitá!})$$

a tedy bude

$$a = \varphi(a),$$

tj. a je kořenem rovnice $x = \varphi(x)$.

Tohoto „objevu" se využívá při výpočtu kořenu rovnice $f(x) = 0$. Tomuto postupu se říká <u>iterační metoda</u> nebo obecněji <u>metoda pevného bodu</u>.

<u>Př.</u>: $x^2 - 5x + 1 = 0 \longrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} = \begin{cases} 4{,}791287\ldots \\ 0{,}208712 \end{cases}$

$\hookrightarrow 5x = x^2 + 1$

$$x = \frac{x^2+1}{5} \longrightarrow \boxed{x_{n+1} = \frac{x_n^2+1}{5}}$$

$x_1 = 1$;	$x_1 = -10$
$x_2 = \frac{2}{5}$	$x_2 = 20{,}2$
$x_3 = 0{,}232$	$x_3 = 81{,}8$
$x_4 = 0{,}21076$	$\vdots$! HA!
$x_5 = 0{,}20888..$	

Pro různé startovací hodnoty x_1 dostáváme různé posloupnosti!! My potřebujeme pouze <u>konvergentní posloupnosti</u>:

<u>Iterační formule</u> $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ musí být vhodně stanovena $\longrightarrow$ viz <u>numerické metody</u>.

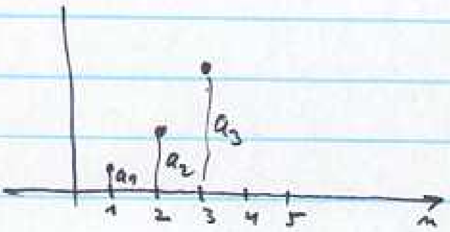
<u>Př.</u>: $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$; $a > 0$, $x_1 > 0$ libovolné: $\underline{x_n \to \sqrt{a}}$

2.3.4. Divergentní posloupnosti

Definice divergentní posloupnosti byla dána v odst. 2.3.1 (negace konvergence)

Pro některé divergentní posloupnosti zavádíme speciální značky

a)

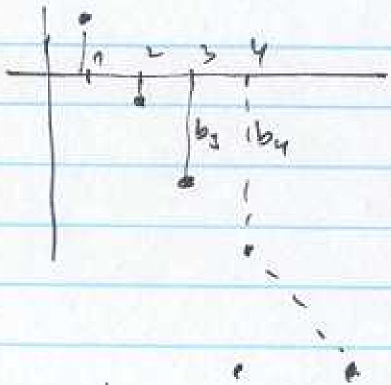


$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$; resp. $a_n \to +\infty$

diverguje k $+\infty$;

např. $\{2^n\}$;

b)

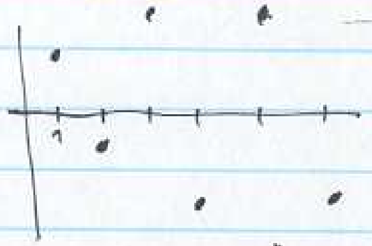


$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty$; , resp. $b_n \to -\infty$

diverguje k $-\infty$;

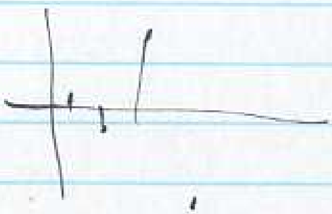
např. $\{(-2)^{2n+1}\}$

c)



např: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$

nemáme značku



např. $\{(-3)^n\}$

Přesnější vymezení pojmu:

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall E>0\ \exists n_0 \in N: (n>n_0 \Rightarrow a_n > E)$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty \iff \forall E>0\ \exists n_0 \in N: (n>n_0 \Rightarrow b_n < -E)$

2.3.5. Neurčité výrazy

musíme (umět) pracovat i s divergentními posloupnostmi

a) $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ $\Rightarrow$ $a_n + b_n \to +\infty$

$a_n \cdot b_n \to +\infty$

$\frac{a_n}{b_n} \to ?$ neurčitý výraz typu „$\frac{\infty}{\infty}$";

$a_n - b_n \to ?$ — " — „$\infty - \infty$"

b) $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$ $\Rightarrow$ $a_n - b_n \to +\infty$

$a_n b_n \to -\infty$

$\frac{a_n}{b_n} \to ?$ neurčitý výraz typu „$\frac{\infty}{\infty}$"

$a_n + b \to ?$ — " — „$\infty - \infty$"

Další případy „algebry" divergentních posloupností: viz SDP, popř. Cv.

Další neurčité výrazy:

i) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$: $\frac{a_n}{b_n} \to ?$ neurčitý výraz typu „$\frac{0}{0}$"

$(a_n)^{b_n} \to ?$ — " — „0^0"

j) $a_n \to 1$, $b_n \to +\infty$: $(a_n)^{b_n} \to ?$ — " — „1^∞"

k) $a_n \to 0$, $b_n \to +\infty$: $a_n \cdot b_n \to ?$ — " — „$0 \cdot \infty$"

Př.: $\left(\frac{n}{n+1}\right)$: $\frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{\overset{\nearrow 1}{1}}{\underset{\searrow 1}{1+\frac{1}{n}}} \to \underline{1}$!

2.4. Konečné a nekonečné součty

2.4.1. Konečné součty a jejich zkrácený zápis

$$a_1+a_2+a_3 = \sum_{k=1}^{3} a_k, \qquad a_1+a_2+a_3+\dots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i;$$

$$a_1+a_2 = \sum_{k=1}^{2} a_k,$$

$$a_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k$$

$$0 = \sum_{k=1}^{0} a_k \equiv \sum_{k=1}^{-1} a_k \equiv \sum_{k=1}^{-10} a_k;$$

$$\sum_{j=3}^{1} b_j = 0, \quad \text{atd};$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n;$$

metoda výpočtu součtu konečného počtu sčítanců: sčítání!!

Př: Stanovte $\sum_{j=1}^{n} a^{n-j} b_{j-1}$ pro různé hodnoty $n \in N$, a je dané číslo a $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ jsou daná čísla.

! Př: Vysvětlete, co může znamenat zápis:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

2.4.2. Nekonečné součty

„Nekonečným součtem" rozumíme symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Tento symbol se také nazývá nekonečná řada vytvořená z posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$.

Př: a) posloupnost (2^n) $\longrightarrow$ nek. řada $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n = 2+2^2+2^3+\dots$

b) $(2^{-n}) = \left(\frac{1}{2^n}\right) \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$

c) $\left(\frac{1}{n}\right) \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$ (tzv. harmonická řada)

d) $\left(\frac{1}{n!}\right) \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

Abychom mohli rozhodnout, kdy existuje součet (číslo) nekonečně mnoha sčítanců, musíme si zavést tzv. posloupnost částečných součtů řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1+a_2+a_3+\dots$.

Je to posloupnost $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ definovaná takto:

$$s_1 = a_1,$$
$$s_2 = a_1+a_2,$$
$$s_3 = a_1+a_2+a_3,$$
$$- - - - -$$
$$s_n = a_1+a_2+a_3+\dots+a_n; \quad (n\text{-tý člen posl. } (s_n))$$

Je-li posloupnost $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ konvergentní, potom číslo

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n$$

se nazývá součet nekonečné řady $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ a píšeme

$$s = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

a říkáme, že nekonečná řada $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ konverguje.

(Poznámka: součet tedy nezískáme sčítáním, ale limitováním).

Pokud posloupnost $(s_n)_{n=1}^{+\infty}$ diverguje, pak symbol $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ zůstává symbolem a říkáme, že nekonečná řada diverguje, tj. nemá součet!

Př: Existuje součet řady $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k = 1-1+1-1+\dots$?

$s_1 = 1$

$s_2 = 0$

$s_3 = 1$

$\vdots$

$s_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$; $\lim s_n$ neexistuje! Promyslete si argumentaci, proč! (viz odst. 2.3.1)

Pro libovolné číslo S existuje ε, že pro nějaké n je $|s_n - S| \geq \varepsilon$.

Př: Existuje součet řady $\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = 1+q+q^2+q^3+\dots$? (geometrická řada)

Odpověď: $s_n = 1+q+q^2+\dots+q^{n-1} = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & \text{pro } q \neq 1 \\ n, & \text{pro } q = 1 \end{cases}$

$\lim s_n$ existuje pro $|q|<1$, neboť pak $q^n \to 0$,

$\Rightarrow \lim s_n = \frac{1}{1-q}$ ... součet konvergentní geometrické řady; pro všechna ostatní q (s_n) diverguje, tj. příslušná geometrická řada diverguje

Př: Existuje součet harmonické řady $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$?

Odpověď: $s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$; $\lim s_n$ neexistuje; tato posloupnost má vlastnost: $s_n \to +\infty$.

Předkládá se k věření! matematické zdůvodnění je poměrně rafinované! (Viz [DM], str. 50)

Závěrečná poznámka. Nekonečné řady (konvergentní) jsou užitečným nástrojem analýzy řady techn. problémů; např. analýza periodických signálů (Fourierova analýza, syntéza) — tzv. Fourierovy řady.

[2.5. ~~Přibližné~~ Výpočty limit a ~~řad~~ součtů nekonečných řad]

2.5.1 Výpočty limit.

1. $y_n = \dfrac{7n}{2+5n}$;

$$y_{10} = \frac{70}{52}$$

$$y_{100} = \frac{700}{502}$$

$$y_{1000} = \frac{7000}{5002}$$

$$\vdots$$

2. $a_n = \dfrac{3^n}{3^n+2}$;

$$y_{10} = \frac{59049}{59051}$$

$$y_{15} = \frac{14348907}{14348909} \longrightarrow 1$$

3. $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$;

n	n^2	2^n	x_n
1	1	2	0,5
2	4	4	1,000
3	9	8	1,125
4	16	16	1,000
5	25	32	0,781
6	36	64	0,562
7	49	128	0,383
⋮			
10	100	1024	0,098
20	400	1 048 576	0,000381
30	900	1 073 741 824	0,000000838

$\underline{x_n \to 0}$ ← je to odhad (sice dosti věrohodný, ale prokázat jistotu se musí logickou úvahou: tj., že pro libovolné $\varepsilon > 0$ vždy existuje n_0, že odtud počínaje je

$$\frac{n^2}{2^n} < \varepsilon \quad)$$

2.5.2. Výpočty součtů řad

1. $\underbrace{\underbrace{\underbrace{1}_{s_1} - \frac{1}{3}}_{s_2} + \frac{1}{5}}_{s_3} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots = \frac{\pi}{4}$; $\lim s_n = \frac{\pi}{4}$

(r. 1380 Oresme)

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = ?$

3. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = ?$ ($\ln 2$

4. $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = ?$ $\left(\frac{\pi^4}{90}\right)$

5. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = ?$ $\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$ (r. 1736 Euler)

6. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots = ?$ (1)

Poznámka: Pouze pro konvergentní geometrickou řadu známe vzorec

2.5.3. Trocha teorie nikoho nezabije

1. Formulujte negaci výroku (implikace):

Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, pak posloupnost členů $\{a_n\}$ konverguje k nule (tzv. nutná podmínka konvergence!!)

Odp.: Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a (současně) posloupnost $\{a_n\}$ nekonverguje k nule.

2. Víme, že výrok a jeho negace nemůže být současně pravdivý. Zdůvodněte (dokažte) (jednoho z výroků v bodě 1) (který pravdivost to je?).

Uveďte ilustrující příklady: např. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+1}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$,

3. Formulujte negaci výroku (implikace):
Když řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje, pak posloupnost členů $\{a_n\}$ je omezená. Ověřte pravdivost či nepravdivost.

Odp.: Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje a (současně) posloupnost $\{a_n\}$ není omezená. Potom $\{a_n\}$ není konvergentní a není splněna nutná podmínka konvergence řady.

4. Za jakých podmínek jsou následující výsledky správné?

a) $\lim \left(2a_n + 3b_n\right)^{\frac{1}{n}} = 1$;

b) $\lim \left(2a_n^{b_n} + 3^{c_n}\right) = 2a^b + 1$;

c) $\lim \left[\left(a_n + \frac{n}{n^2+1}\right)^2 + \left(b_n - \frac{n^2}{n^2+1}\right)^3\right] = a^2 + (b-1)^3$;

d) $\lim \left(e^{a_n} + \ln b_n\right) = e^a + \ln b$.

Odp.: $a_n > 0$, $b_n > 0$ (proč?); $a_n \to a$, $a > 0$; $b_n \to b$, $b > 0$; $c_n \to 0$.

5. Zdůvodněte pravdivost následujících implikací:

a) $\sum x_n$, $\sum y_n$ konvergují $\Longrightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\sum (x_n \pm y_n) \\ \sum c x_n\end{array}\right\}$ také konvergují, $c \in R$.

(Stačí se zamyslet nad posloupnostmi částečných součtů!)

6. Řady $\sum x_n$, $x_n \geqq 0$; $\sum y_n$, $y_n \geqq 0$ konvergují a platí nerovnost $0 \leqq x_n \leqq y_n$ pro $n > n_0$ (pro skoro všechna n) $\Longrightarrow$

a) Když $\sum y_n$ konverguje, pak $\sum x_n$ konverguje,
b) Když $\sum x_n$ diverguje, pak $\sum y_n$ diverguje.

7. Zdůvodněte, že následující řady divergují:

$$\sum 2^{\frac{1}{n}} \; ; \qquad \sum (-1)^n \; ; \qquad \sum \frac{2^n}{n^3}$$

8. Najděte součet geometrických řad

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{1}{5}\right)^n$; [Výsl. $\frac{15}{4}$],

b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$; [Výsl. $-\frac{2}{5}$].

c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots$; [Výsl. 1].

d) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ [Výsl. $\frac{3}{5}$].

9. Lze každou posloupnost považovat za posloupnost částečných součtů nějaké nekonečné řady?
[Výsl.: ano, uveďte na příkladu takovou konstrukci!]